<u>Théorème Alternative de Fredholm</u>. Soit E un esp de Banach et T un op cpt. Alors

1/ $Ker(I-T)$ est dim $< \infty$

2/ $Im(I-T)$ est fermé et plus précisément $Im(I-T) = Ker(I-T^*)^{\perp}$

3/ $Ker(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow Im(I-T) = E$.

4/ $\dim Ker(I-T) = \dim Ker(I-T^*)$.

Maintenant voyons de quoi est constitué le spectre d'un opérateur compact sur un esp de Banach E de dimension ∞.

<u>Théorème</u>: Soit T un op cpt de E ds E, E un esp de Banach de dimension infinie.

1- 0 est une valeur spectrale de T i.e $0 \in \sigma(T)$

2- Toute valeur spectrale non nulle de T est une valeur propre de T et le sous esp propre associé est dim $< \infty$ i.e $\sigma(T) = \sigma_p(T) - \{0\}$.

3- le spectre de T est dénombrable, s'il est infini on peut ranger ses élts non nuls en une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$ et $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$

<u>Dem</u>: 1/ supp $0 \notin \sigma(T)$ alors $I = TT^{-1}$ est un opérateur cpt d'après le Th de Riesz dim $E < \infty \Rightarrow$ contradiction.

2/ Montrons que si $\lambda \in \sigma(T) - \{0\} = \sigma_p(T)$

si $\lambda \in \sigma(T) - \{0\} \Rightarrow (\lambda I - T)$ n'est pas inversible