2 cas se présentent

<u>1er cas</u>: $(I - \frac{T}{\lambda})$ n'est pas injectif $\Rightarrow \ker(I - \frac{T}{\lambda}) \neq \{0\}$

<u>2ème cas</u>: $(I - \frac{T}{\lambda})$ n'est pas surjectif $\to$ d'après le précédent résultat il n'est pas injectif.

En appliquant une autre fois le précédent résultat $\dim \ker(\lambda I - T) < \infty$.

3/ D'abord, montrons que l'ensemble des v.p est isolée

toute v.p non nulle λ est isolée (tq $|\lambda| \geq \varepsilon$)

Raisonnons par l'absurde supp $\exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \sigma(T)$ tq

$\lambda_n \neq \lambda$, $\lambda_n \neq 0$ et $\lambda_p \neq \lambda_q$ pour $p \neq q$ et $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$

tq $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$

pour chaque v.p λ_n on lui associe un vect propre x_n (avec $x_n \neq 0$)

la suite (x_n) est libre

$E_n = \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$

On a $E_n \subsetneq E_{n+1}$.

Pour la suite de la preuve on fait appel au lemme suivant

<u>Lemme</u> Soit E un esp vect. normé et F un s/ esp fermé strict de E

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists u \in E$, $\|u\| = 1$, $d(u, F) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$

si $\dim E < \infty$, on prend $\varepsilon = 0$.

Montrons que effectivement $E_n \subsetneq E_{n+1}$ $\forall n \geq 1$

il suffit de vérifier que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants. On raisonne par l'absurde