Raisonnons par récurrence. Supp que le résultat est vrai ~~pour~~ à l'ordre n et supp que

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad , \quad Tx_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Tx_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i$$

or $Tx_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1}$. par la suite

$$Tx_{n+1} - \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{n+1}) \alpha_i x_i = 0.$$

$$\alpha_i x_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0 \quad \forall i = \overline{1, \dots, n}$$

donc $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ ce qui absurde.

Appliquons le lemme précédent pour E_n et E_{n+1} avec $\|u_n\| = 1$, $u_n \in E_{n+1}$ et $d(u_n, E_n) = 1$

Posons $v_n = \frac{u_n}{\lambda_{n+1}}$.

la suite v_n est bornée par $\frac{1}{\varepsilon}$ (car $\lambda_{n+1} \neq 0$)

[Nous allons montrer que son image par T ne contient aucune s/ suite cvgte ce qui contredirait le fait que T est compact].

Pour $n > m$

$T v_n - T v_m = T \frac{u_n}{\lambda_{n+1}} - T v_m$.

Essayons de l'écrire s/ la forme $u_n - v_{n,m}$.

$$Tv_n - Tv_m = \lambda_{n+1} \frac{u_n}{\lambda_{n+1}} \underbrace{- \lambda_{n+1} \frac{u_n}{\lambda_{n+1}} + \frac{Tu_n}{\lambda_{n+1}} - T v_m}_{v_{n,m}}$$

$$= u_n - v_{n,m}.$$

Par construction, on a $T v_m \in E_{m+1} \subset E_{n+1}$