l'image de E_{n+1} par $\lambda_{n+1} I - T$ est contenue ds E_n i.e $\|Tv_n - Tv_m\| \geq \varepsilon$ i.e Tv_n ne contient aucune sous suite de Cauchy et donc aucune sous-suite cvgte i.e T n'est pas compact, contradiction.

Exercice
Soit $E = C([0,1])$ esp de Banach à valeurs complexes, continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. $T : E \to E$ défini par
$Tf(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t)\, dt$

Mq $\sigma(T) = \{\frac{1}{2}(e^2 - 1)\} \cup \{0\}$

Etude spectrale d'un op cpt auto-adjoint

- E un esp de Hilbert, T un op compact auto-adjoint.

Théorème Si $T \in K(E)$ auto-adj, alors il admet une valeur pque λ tq $|\lambda| = \|T\|$.

Dem: On sait que pour un op auto-adj^t,
$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$

Posons $a = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ $\left(-a = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle\right)$
donc il existe une suite (x_n) tq.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = a$
Comme T est compact on peut extraire une sous suite notée x_n tq $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$.
On a $\|y\| \leq a$.