Montrons : $Ty = ay$. On a

$$\|Tx_n - ax_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 + a^2 - 2a\,Re\langle Tx_n, x_n\rangle$$

T est auto-adj $\Rightarrow Re\langle Tx_n, x_n\rangle = \langle Tx_n, x_n\rangle$

$$\lim_{n\to+\infty} \|Tx_n - ax_n\|^2 = \|y\|^2 + a^2 - 2a^2$$
$$= \|y\|^2 - a^2 \leq 0$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \|Tx_n - a x_n\|^2 = 0$

T est cpt, par conséquent

$\lim_{n\to+\infty} T^2 x_n = \lim_{n\to+\infty} a T x_n$ comme $\lim_{n\to+\infty} T x_n = y$

alors $Ty = ay \Rightarrow a$ est une v.p de T.

<u>Remarque</u> :

On sait déjà que pour un opérateur auto-adj que $\sigma(T) \subset [m, M] = [-\|T\|, \|T\|]$. le Théorème précédent, nous précise que si A est en plus compact alors l'une des extrémités de cet intervalle est une valeur propre de T.

D'après les précédents résultats, l'ensemble des v.p d'un op cpt, $|\lambda_n|$ est une suite décroissante les v.p sont réelles pour un op auto-adj. l'ensemble des v.p est fini (ou dénombrable), $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$ tq $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

On désigne par E_n le s/ esp propre correspondant à la v.p. λ_n et par P_n la projection orthogonale sur E_n.