Proposition soit $F_n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$. Alors pour tout n

$$|\lambda_{n+1}| = \sup_{\substack{x \in F_n^{\perp} \\ \|x\| = 1}} |\langle Tx, x \rangle|$$

De cette proposition on peut énoncer que tout op cpt auto-adj est diagonalisable

Théorème $\forall x \in E$, s'écrit d'une façon unique sous forme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + x_0 \quad \forall n \geq 1$ avec $x_n \in E_n$ et x_0 sa projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(T)$ de plus, on a

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \quad \forall x \in E$$

i.e $E = \overline{F_n} \oplus \mathrm{Ker}(T)$ et $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$

F_n : la somme hilbertienne des sous esp propres E_n

Dem:

$F_n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$

Définissons

$T_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \qquad R_n = T - T_n$

R_n est l'op induit par T sur $F_n^{\perp}$

$$R_n x = \begin{cases} Tx & \text{si } x \in F_n^{\perp} \\ 0 & \text{si } x \in F_n \end{cases}$$

R_n est un op cpt auto-adj ses v.p. λ_j, $j \geq n+1$

D'après la proposition, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \|T - T_n\| = \lim_{n \to +\infty} \|R_n\| = \lim_{n \to +\infty} |\lambda_{n+1}| = 0$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \|T - T_n\| = 0 = \|T - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i\| = 0$