Ainsi la serie $\sum_{i\geq 1} \lambda_i P_i$ est convergente et de somme $= T$. Alors

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

D'autre part,

$$Ker(T) \perp E_n \text{ i.e } Ker T \subset F_n^{\perp}$$

Mq $Ker T = F_n^{\perp}$

Soit $x \in F_n^{\perp}$, $\forall n$, $T_n x = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} T_n x = Tx \Rightarrow x \in Ker T \Rightarrow F_n^{\perp} \subset Ker T$$

$$E = F_n \oplus F_n^{\perp} = F_n + Ker T.$$

<u>Rq</u>: si E est un esp de Hilbert séparable, il existe une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

<u>Alternative de Fredholm</u>.

A un op cpt auto-adj dans un esp de Hilbert E. Soit $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tq

$$Ax - \lambda x = y.$$

où y est donné dans E et x l'inconnu.

On a 2 cas soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ ou $\lambda \notin \sigma_p(A)$.

<u>1er cas</u> $\lambda \notin \sigma_p(A)$

$Ax - \lambda x = y$ admet une solution unique $x \in E$. puisque $(A - \lambda I)$ est inversible. D'après le Th, on a

$$y = \sum_{n\geq 1} y_n + y_0 \quad \text{avec} \begin{cases} y_n \in E_n, \ x_n \in E_n \\ x_0, y_0 \in Ker(A) \end{cases}$$

$$x = \sum_{n\geq 1} x_n + x_0.$$

E_n les sf esp propres associés aux v.p de A