Solution Exercice 1

1. Equation de propagation du champ E dans le vide ?

Compte tenu de l'expression de E donnée par hypothèse, et des équations de Maxwell appliquées au cas du vide :

$$\boldsymbol{E} = E_0[expi(\omega t - ax - by)]\boldsymbol{u_z}$$

Cette expression s'écrit aussi :

$$\boldsymbol{E} = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} exp[i(\omega t - ax - by)]$$

Note :   L'écriture en gras désigne la notation vectorielle

div**E**=0, $Rot\boldsymbol{E} = -\,{}^{\partial \boldsymbol{B}}/_{\partial t}$ et $Rot\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\,{}^{\partial \boldsymbol{E}}/_{\partial t}$

l'équation de propagation à laquelle obéit, le champ E de l'OEM est exprimée en écrivant :
$Rot(Rot\boldsymbol{E}) = -Rot\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\,RotB$

Puisque, Rot(RotE)= - grad(divE) - ΔE, et divE= 0, on aboutit à la relation :

$$\Delta\boldsymbol{E} - \ \varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

Le calcul explicite des deux termes de cette équation est comme suite:

$$\Delta\boldsymbol{E} = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (a+b)^2 exp[i(\omega t - ax - by)]$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} exp[i(\omega t - ax - by)]$$

2. Relation liant les termes a, b et ω ?

En considérant l'équation de propagation à laquelle obéit E, on obtient
$(a+b)^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 = \omega^2/c^2$,   c'est la relation de dispersion de l'OEM dans le vide.

3. Que représentent les coefficients a et b ?. Déterminer la longueur d'onde en fonction de a et b et la direction θ de propagation de l'onde.

L'analogie de l'expression de E avec la forme générale E=**Eexp(i(wt – k.r),** permet de conclure que a et b représentent les composantes du vecteur d'onde **k** par rapport à x et y respectivement.

Soit **k**=a$\mathbf{u}_x$ + b$\mathbf{u}_y$**, et l'OEM** se propage dans le plan Oxy

La longueur d'onde notée λ ?: on sait que k = ω/C=2π/λ = a + b, Soit λ=2π/(a+b)

L'angle que forme le vecteur d'onde par rapport aux deux axes Ox et Oy s'exprime par tangθ=b/a

4. Exprimer le vecteur champ magnétique B de l'onde. Que peut-on dire des directions des champs E et B en chaque point de l'espace ?

Pour déterminer le champ B associé à E, on exploite l'équation de Maxwell-Faraday :

$$Rot\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$$

On a l'expression de E, d'où on calcule **RotE**, puis on intègre par rapport au temps pour retrouver **B**. La réponse à cette question ne pose aucun problème.