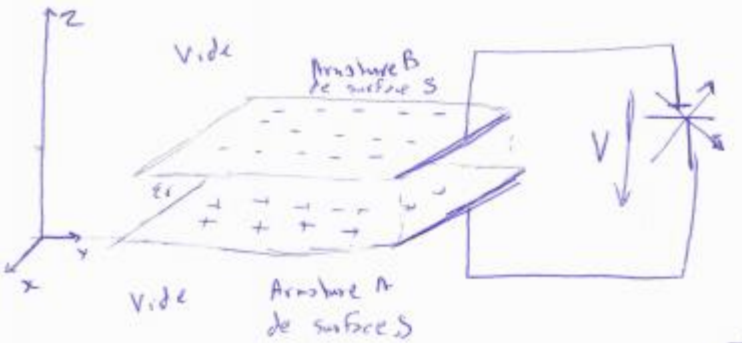
TD 1 (Propriétés diélectriques des polymères)

Solutions des exercices

Exercice I : Condensateur



$V = V_A - V_B$

maintenir la charge de condensateur cte

$\Rightarrow$ les charges réels sont sur les Armature

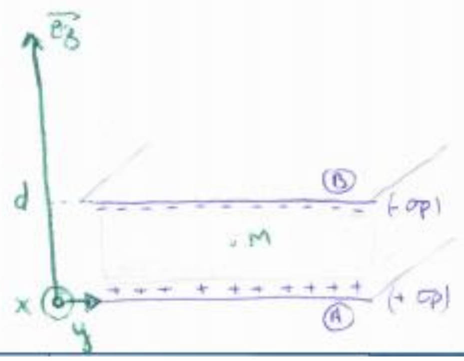
On assimile les armature à des plan infini $\Rightarrow$

$\cdot L \gg d$

$l \gg d$

Armature A chargée $+\sigma_l$

Armature B chargée $-\sigma_l$



Etude de symétrie :

$\forall M(x,y,z) \Rightarrow \vec{E}(M) = E_x \vec{e_x} + E_y \vec{e_y} + E_z \vec{e_z}$

En generale $\boxed{\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{e_x} + E(x,y,z)\vec{e_y} + E(x,y,z)\vec{e_z}}$

a/ Plan de symetrie ou Axe de symetrie

- Tout plan contenant M est $\perp$ au Armature est un plan de symétrie
  En particulier le plan $\left.\begin{array}{l} Oxz \text{ passant par } M \\ Oyz \text{ passant par } M \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E}$ est porté par $\vec{e_z}$
  $E_x = E_y = 0$ et $\vec{E} = E_z \vec{e_z}$

- $\left.\begin{array}{l}\text{Tout axe passant par M et // a l'axe Z} \\ \text{est un axe de symétrie}\end{array}\right\} \Rightarrow E$ porté par $\vec{e_z}$

Etude de l'invariance :

Les operation qui laissent la symétrie invariante sont :

- Translation suivant x
- Translation suivant y

$\textcircled{=}$ - EE

Resumé :

Par raison de symétrie

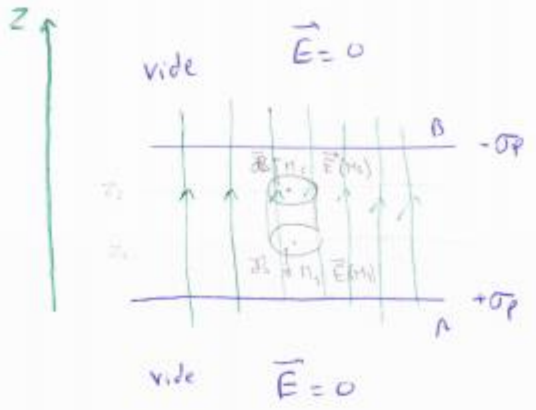
$\left.\begin{array}{l}\vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{e_z} \\ \vec{D}(M) = D_z(z)\,\vec{e_z}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{Les lignes de} \\ \text{champ de } \vec{E} \\ \text{ou } \vec{D}\end{array}\right\}$ sont des droits // a l'axe e_z

choix de la surface de Gauss

$\Rightarrow$  petit cylindre de base dS d'axe $\vec{e_z}$

1/ a/ En absence de dielectrique

1°/ a/ En absence de dielectrique



montrer que E est uniforme entre les armature

Cylindre ① → thé. Gauss.

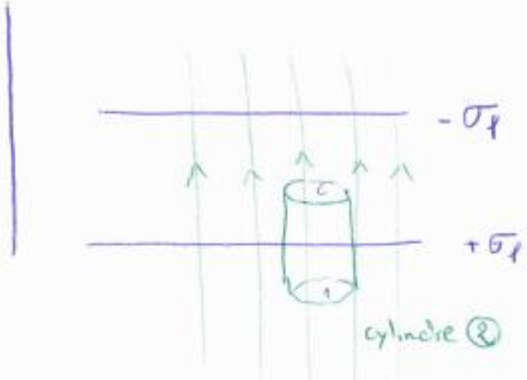
$$d\phi_{cylind_①} = d\phi_{b_2} + d\phi_{b_1} + \cancel{d\phi_{S_L}} = 0$$

$$= \vec{E}(M_2)\,\vec{dS}_{b_2} + \vec{E}(M_1)\,\vec{dS}_{b_1}$$

$$= E(M_2)\,dS - E(M_1)\,dS$$

$$d\phi_{cylind_①} = \left(E(M_2) - E_1(M_1)\right)dS = \Sigma Q = 0$$

Donc le champ est uniforme $\Longleftarrow$ $\vec{E}(M_2) = \vec{E}(M_1)$



Th. Gauss ⟶ Cylindre 2

$$d\phi_{cylindre\ 2} = d\phi_{b2} + \underbrace{d\phi_{lib_1}}_{\substack{0 \\ \text{exterieur}}} + d\phi_{SL}^{=0}$$

$$= E_0\, dS = \frac{\sigma_P\, dS}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_0} = \frac{\sigma_P}{\varepsilon}\, e_z} = E_z\, \vec{e_3}$$

So Capacité C_0

$$C_0 = \frac{Q_{lib}}{V_A - V_B}$$

$$V_A - V_B = ?$$

$$E = -\text{grad}\, V$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{dV}{dz}$$

$$dV = -E_z dz = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}\int_0^d dz$$

$$V_B - V_A = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} d$$

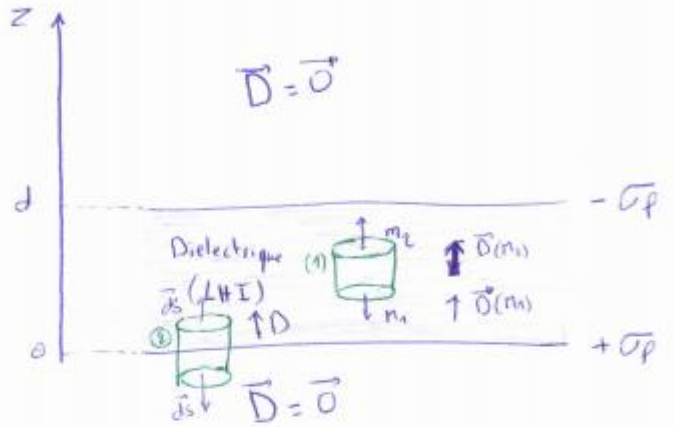
$$V_A - V_B = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} d$$

Donc
$$C_0 = \frac{Q_{Libr}}{\frac{\sigma_P d}{\varepsilon_0}} = \frac{\sigma_P S \varepsilon_0}{\sigma_P d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

So Capacité $\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$

Pour un dielectrique $\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r C_0}$

b/ En presence du dielectrique :



Le dielectrique LHI est placé dans le champ $\vec{E}_{ext} = \vec{E_0}$ uniforme

=> Il se polarise => Apparition de charge de polarisation

On utilisant le Theoreme de Gauss Appliqué a $\vec{D}$

$$\oiint \vec{D}\,\vec{dS} = \sum Q_{libre}$$

de même cylindre ① => $\vec{D}$ uniforme de même la capacité C en présence de diélectrique

$$C = \frac{\varepsilon E}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C_0$$

Augmentation de la capacité du condensateur

2°/ Vecteur Polarisation

diélectrique LHI $\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon}\vec{e_z}$$

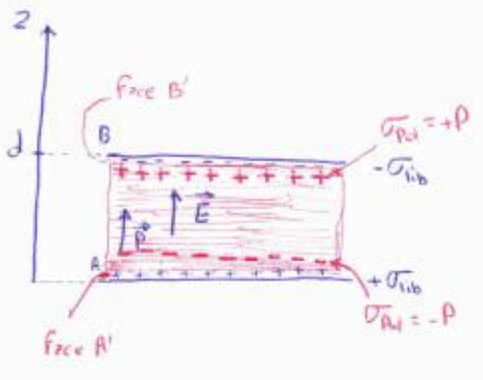
$$\boxed{\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_{lib}\,\vec{e_z}}$$

$\vec{P}$ est uniforme

Donc si le diélectrique LHI est placer dans un champ excitateur uniforme
$\Rightarrow$ La polarisation $\vec{P}$ uniforme // $\vec{E_0}$

3°/ Charges de polarisation

• En volume : $\rho_{Pol} = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$ car $\vec{P}$ est uniforme



Sur la face A'

$$(\sigma_{Pol})_{A'} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{\text{extérieur } A'}$$

$$= P\vec{e_z}\cdot(-\vec{e_z})$$

$$\boxed{(\sigma_{Pol})_{A'} = -P} \quad \boxed{\sigma_{Pol_{A'}} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_{lib}}$$

Sur la face B'

$$(\sigma_{Pol})_{B'} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{\text{extérieur } B'} = P\,\vec{e_z}\cdot\vec{e_z} = +P$$

$$\boxed{(\sigma_{Pol})_{B'} = +P = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_{lib}}$$

on a $\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E_p}$

$$\vec{E_p} = \vec{E} - \vec{E_0}$$

$$= \left(\frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon} - \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0}\right)\vec{e_z}$$

$$\vec{E_p} = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\vec{e_z}$$

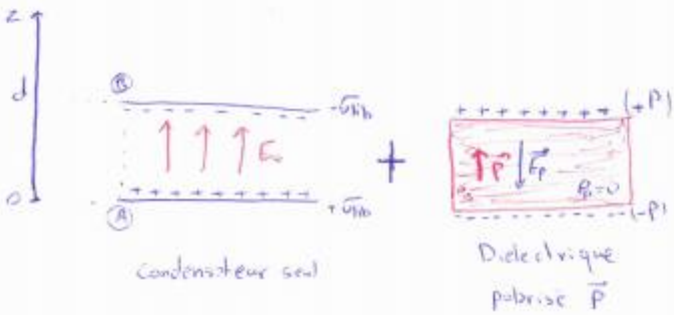
$$\boxed{\vec{E_p} = \frac{-P}{\varepsilon_0}\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{E_p} = \frac{-\vec{P}}{\varepsilon_0}}$$

Rq : E_p de sens opposé à $\vec{P}$ d'où l'apparition de champ dépolarisant.

Par superposition

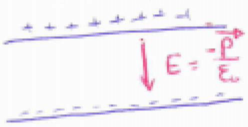
système $\equiv$



$\vec{E_p} = \frac{P}{\varepsilon_0}(-\vec{e_z})$

$\Updownarrow$

à une distribution de charges dans le vide qui a la forme d'un condensateur Plan dans le vide



4°/ $\varepsilon(z) = \varepsilon_0(1 + \alpha z)$ $\alpha > 0$

on a $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + P$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon(z)\vec{E} - \varepsilon_0 E = (\varepsilon(z) - \varepsilon_0)\vec{E}$$

$$= (\varepsilon(z) - \varepsilon_0)\frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon(z)}\vec{e_z} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z)}\right)\sigma_{lib}\vec{e_z}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha z}\right)\sigma_{lib}\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\alpha z}{1+\alpha z}\sigma_{lib}\,\vec{e_z}}$$

, $\vec{P}$ n'est pas uniforme il depend de z $\vec{P} = \vec{P}(z)\,\vec{e_z}$

* Les densité de charges de polarisation

- En volume

$\rho_{Pol} = -\operatorname{div}\vec{P} =$

En coordonnées cartesienne

En general si on a $\vec{P}\begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{vmatrix}$

$$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Ici on $\vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ P_z = P(z) \end{vmatrix}$

$$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{\partial P(z)}{\partial z} = \frac{dP(z)}{dz}$$

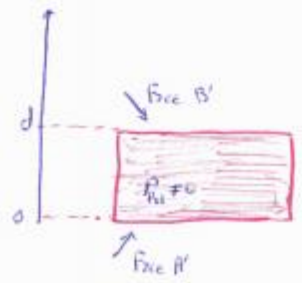
$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{dP(z)}{dz}$ avec $P(z) = \frac{\alpha z}{1+\alpha z}\sigma_{lib}$

$$= \alpha\sigma_{lib}\left[\frac{1+\alpha z-\alpha z}{(1+\alpha z)^2}\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{\alpha}{(1+\alpha z)^2}\sigma_{lib}$$

Or $\boxed{\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P} = -\frac{\alpha}{1+\alpha z}\sigma_{lib}}$

- En surface $\sigma_{Pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{exterieur}$



sur la face A' $z=0$ $P(z)=0$

$$\vec{P} = P(z=0)\,\vec{e_z} = \vec{0}$$

$$\sigma_{Pol})_{A'} = 0$$

sur la face B' $\quad z = d$

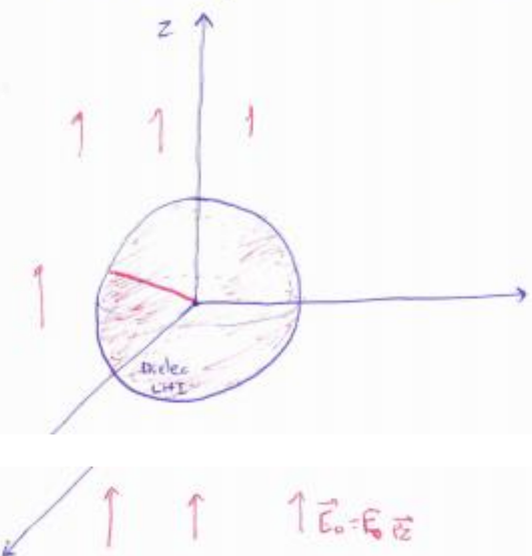
$$\vec{P}_{(z=d)} = \frac{\alpha d}{1+\alpha d}\,\sigma_{lib}\,\vec{e_z}$$

$$\sigma_{Pol}\Big|_{B'} = \vec{P}_{(z=d)}\cdot\vec{n} = P_{(z=d)}\vec{e_z}\cdot e_z = +P_{(z=d)}$$

$$\boxed{\sigma_{Pol}\Big|_{B'} = \frac{\alpha d}{1+\alpha d}\,\sigma_{lib}}$$

Exercice II

Dielectrique LHI Sphérique placé dans un champ uniforme $\vec{E_0} = E_0\,\vec{e_z}$



On a un dielectrique LHI placé dans un champ $\vec{E_0} = E_0\,\vec{e_z}$ (uniforme)

$\Rightarrow$ la polarisation $\vec{P}$ est uniforme

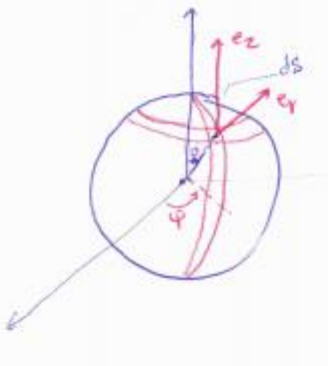
$$\boxed{\vec{P} = P\,\vec{e_z}}$$

1/ Densités de charge de polarisation

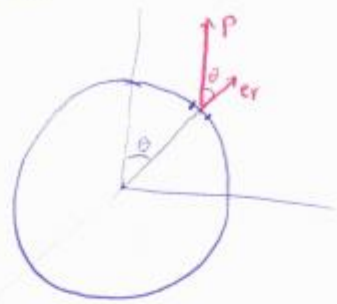
- En volume :

$$\rho_{Pol} = -\operatorname{div}\vec{P} = 0 \qquad \text{car } \vec{P} \text{ est uniforme}$$

- En surface :



$$\sigma_{lib} = \vec{P}\cdot\vec{n} = P\,\vec{e_z}\cdot\vec{e_r}$$



Donc $\sigma_{Pol} = P\cos\theta$

→ le signe de σ_{Pol} dépend de θ

- Sur la demi sphère supérieur

  θ varie entre $0, \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\theta > 0$

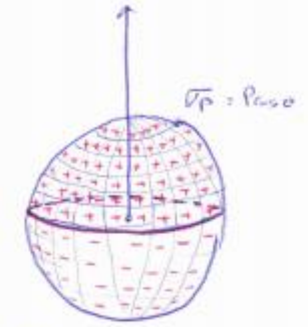
  $$\sigma_{Pol} > 0$$

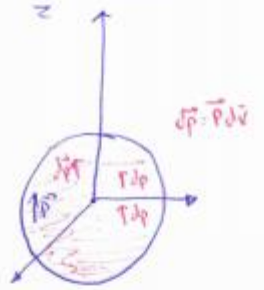
- Sur la demi sphère inférieur

  θ varie entre $\frac{\pi}{2}$, et π $\quad \cos\theta < 0$

  $$\sigma_{Pol} < 0$$

Représentation :



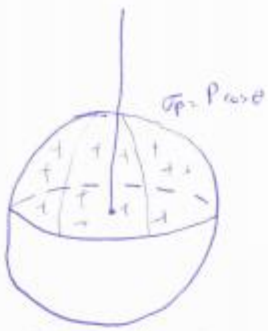


Diélectrique polarisé $\vec{P}$
(plein de dipôle)

$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$ $\quad d\vec{p} \parallel \vec{P}$

Fig (a)

⟺

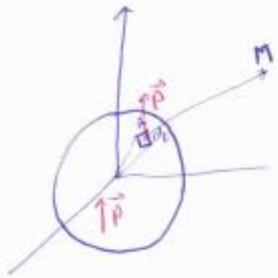


sphère chargé dans le vide avec une densité $\sigma_p = P\cos\theta$

Fig(b)

Fig (a) = Fig(b)

2/ a/ En considère la Fig (a)



Soit un petit element de volum $d\tau(A)$ centre sur $\vec{A}$
il contient le moment dipolaire

$$d\vec{p}(A) = \vec{P}\, d\tau$$

et crée en M le potentiel elementaire

$$dV_{Pol}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{AM}}{AM^3}$$

b/ $$V_{Pol}(M) = \iiint dV = \vec{P} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\text{volume sphère}} \frac{d\tau\, \vec{AM}}{AM^3}}$$

$$= \vec{P} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\text{sphère}} \overset{1}{\rho}\, d\tau \, \frac{\vec{AM}}{AM^3}$$

$$= \vec{P} \cdot \vec{E}_{\text{fictif}}$$

$\vec{E}_f = \vec{E}_{\text{Fictif}}$ = champ Fiction
champ du sphère chargée voluminquement ρ avec $\rho = 1$
champ facile a calculer Th de Gu

Symétrie spherique $\vec{E}_f = E_f(r)\,\vec{e_r}$
choix de la S. G sphere de rayon r

Si M a l'exterieur $r > R$

$$E_f \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4\pi R^3}{3}}{\varepsilon_0}$$

$$E_f = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{avec } \rho = 1$$

$$\boxed{(\vec{E_f})_{\text{exter}} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e_r}}$$

Si M à l'interieur $r < R$

$$E_f \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4\pi r^3}{3}}{\varepsilon_0}$$

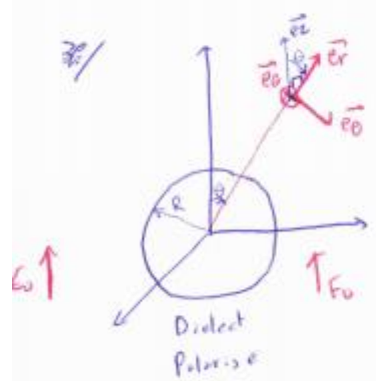
$$E_f = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad \rho = 1$$

$$\Rightarrow \quad E_f = \frac{r}{3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\left(\vec{E}_f\right)_{inter} = \frac{r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}}$$

2°/ $V_{Pol}(M) = \vec{P} \cdot E_f$ avec $E_f \left| \begin{array}{l} \text{A l'interieur } r<R \quad \vec{E}_f = \frac{r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} \\ \text{A l'exterieur } r>R \quad \vec{E}_f = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} \end{array} \right.$

3°/ Calcule de $V_{Pol}(M)$



$\vec{P} = P\vec{e_z}$

a – A l'interieur du dielectrique : r on $< R$

$$V_{Pol}(M)_{int} = \vec{P} \cdot \vec{E}_f(M)_{int}$$

$$= P\vec{e_z} \cdot \frac{r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} = \frac{Pr}{3\varepsilon_0} \underbrace{\vec{e_z} \cdot \vec{e_r}}_{\cos\theta}$$

$$\boxed{V_{Pol}(M)_{int} = \frac{Pr}{3\varepsilon_0}\cos\theta}$$

et $E_{Pol}(M)_{int} = ?$ on utilise $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

$$E_{Pol}(M)_{int} = -\,\text{grad}\; V_{Pol}(M)_{int}$$

$$\vec{E}_{Pol} \left| \begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-P\cos\theta}{3\varepsilon_0} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P\sin\theta}{3\varepsilon_0} \\ E_\varphi = \frac{-1}{r}\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\vec{E}_{Pol}(M)_{int} = \frac{-P\cos\theta}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} + \frac{P\sin\theta}{3\varepsilon_0}e_\theta}$$

$$\vec{E}_{Pol}(M)_{int} = \frac{-P}{3\varepsilon_0}\left(\underbrace{\cos\theta\, e_r - \sin\theta\, e_\theta}_{e_z}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}_{Pol}(M)_{int} = \frac{-P}{3\varepsilon_0}\,\vec{e_z} = \frac{-\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

Remarque :

E_p est uniforme s'oppose à $\vec{P}$

aussi ne dépend pas de R

(voir cavité sphérique)

b. A l'exterieur : $r = OM > R$

$$V_{Pol}(M)_{ext} = \vec{P} \cdot E_F \big|_{exter}$$

$$= P\,\vec{e_z} \cdot \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e_r}$$

$$\boxed{V_{Pol}(M)_{exter} = \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta}$$

$$\text{et } \vec{E}_{Pol}(M)_{ext} = \left|\begin{array}{l} E_r = \dfrac{-\partial V}{\partial r} = + \dfrac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta \\ E_\varphi = 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\vec{E}_{Pol}(M)_{ext} = \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\,\vec{e_r} + \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\,\vec{e_\theta}}$$

4°/ En deduire $\vec{E}$ et $\vec{D}$ en tt pt de l'espace

A l'interieur : diélectrique L.H.I

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_{P_1}(M)_{int} = E_0\,\vec{e_z} + E_{P_1}(M)_{inter}$$

$$\vec{D}(M) = \varepsilon\,\vec{E}(M)$$

• A l'exterieur : vide

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + E_{P_1}(M)_{ext} = E_0\,\vec{e_z} + \vec{E}_{P_1}(M)_{ext}$$

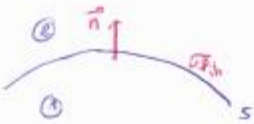
$$\vec{D}(M) = \varepsilon_0\,\vec{E}(M)$$

5°/ Verifier les relation de passage entre les deux milieux ① diélec et ② vide

Rappel

• Continuité de la Composant tangencielle de $\vec{E}$

$$E_{T_1} = E_{T_2} \quad \text{toujour}$$



• Discontinuité de la Composante normale de $\vec{D}$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{lib}}$$

* Si la surface de separation n'est pas chargée

$$\sigma_{lib} = 0$$

⇒ Continuité

$$\boxed{D_{1N} = D_{2N}}$$

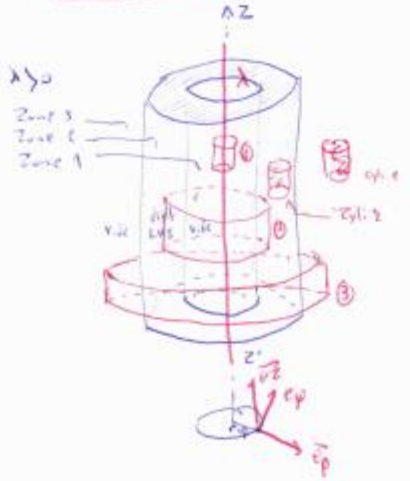
Remarque

La surface de séparation n'est pas chargée (Exercice 2)

⇒ $E_\theta)_{int} = E_\theta)_{ext}$ avec $\vec{E}_{int} = E_r \vec{e_z} + E_\theta \vec{e_\theta}$

$D_r)_{int} = D_r)_{ext}$

Exercice 3 :



Le système possède une symétrie cylindrique $\rho = r$

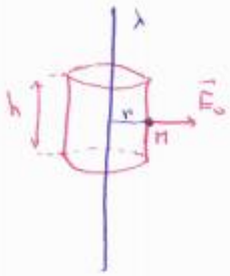
$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_\rho}$

et $\vec{D}(M) = D(r)\,\vec{e_\rho}$

Donc par application de Th de Gauss

→ Surface de Gauss | cylindre de rayon r
de hauteur h
centré sur z'z

1°/ Le Fil infini chargée $\lambda > 0$ crée un champ $\vec{E_0}$ en tout point M de l'espace



Théorème De Gauss :

$$E(r)\, 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Donc $\boxed{\vec{E_0} = E(r)\vec{e_\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_\rho}}$

qui polarise le dielectrique. Avec $\boxed{\vec{P} = P(r)\vec{e_\rho}}$

2°/ On applique le Théorème de Gauss à D

$$\oiint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \Sigma Q_{libre}$$

On distingue 3 zone

- Zone 1 (vide) $r < R_1$ Cylindre ① $\Rightarrow$ $D_1\, 2\pi r h = \lambda h$

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{D_1} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_\rho}}$$

$$\vec{D_1} = \varepsilon_0 \vec{E_1} \Rightarrow \boxed{\vec{E_1} = \frac{D_1}{\varepsilon_0}\vec{e_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_\rho}}$$

$$\vec{E_1} = \vec{E_0} + \vec{E_{p_1}} \Rightarrow \boxed{\vec{E_{p_1}} = \vec{E_1} - \vec{E_0} = \vec{0}}$$

- Zone 2 (diele LHI) $R_1 < r < R_2$ Cylindre 2 $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{D_2} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_\rho}}$

$$D_2 = \varepsilon E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\vec{E_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{e_\rho}}$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\vec{e_\rho}$$

$$\vec{E}_{P_2} = \vec{E}_2 - \vec{E}_0$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{E}_{P_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_\rho}}$$

- Zone 3 (vide) Cylindre 3 $\boxed{D_3 = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_\rho}}$

$r > R_2$

$$\vec{D}_3 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_3}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_\rho}}$$

$$\vec{E}_{P_3} = \vec{E}_3 - \vec{E}_0 = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{P_3} = \vec{0}}$$

3/ $\left.\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_2 \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2\end{array}\right\}$ zone 2 diélec LHI

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2$$

$$\vec{P}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_2$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_2$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\cdot\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\vec{e_\rho}$$

$$\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_\rho}$$

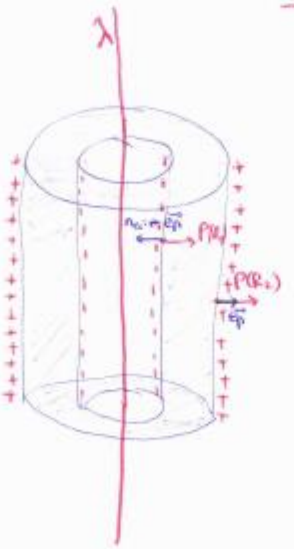
$$\boxed{\vec{P} = \frac{\lambda}{2\pi r}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_\rho}}$$

$\vec{P} = P(r)\,\vec{e_\rho}$: Avec $P(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)$

6°/ Densité de charge de polarisation

• En surface $\sigma_{Pol} = \vec{P}.\vec{n}_{exter}$

surface interne :



$$\vec{P}(r) = \vec{P}(R_1) = \frac{\lambda}{2\pi R_1}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_p}$$

$$\vec{n} = \vec{e_p}$$

$$\sigma_{Pol_{ext}} = \vec{P}(R_1).\vec{n}_{ext} = P(R_1)\ \vec{e_p}.(-\vec{e_p})$$

$$\sigma_{Pol_{ext}} = -P(R_1)$$

$$\boxed{\sigma_{Pol_{1}ext} = \frac{-\lambda}{2\pi R_1}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)} < 0$$

surface externe

$$\sigma_{Pol\,ext} = \vec{P}(R_2).n_{ext}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi R_2}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_p}.e_p$$

$$\boxed{\sigma_{Pol_2\,ext} = \frac{\lambda}{2\pi R_1}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)} > 0$$

- <u>En Volume :</u>

$$\rho_{Pol} = -\mathrm{div}\,\vec{P}$$

Expression de div en coord cylindrique $M(\rho=r, \varphi, z)$. $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

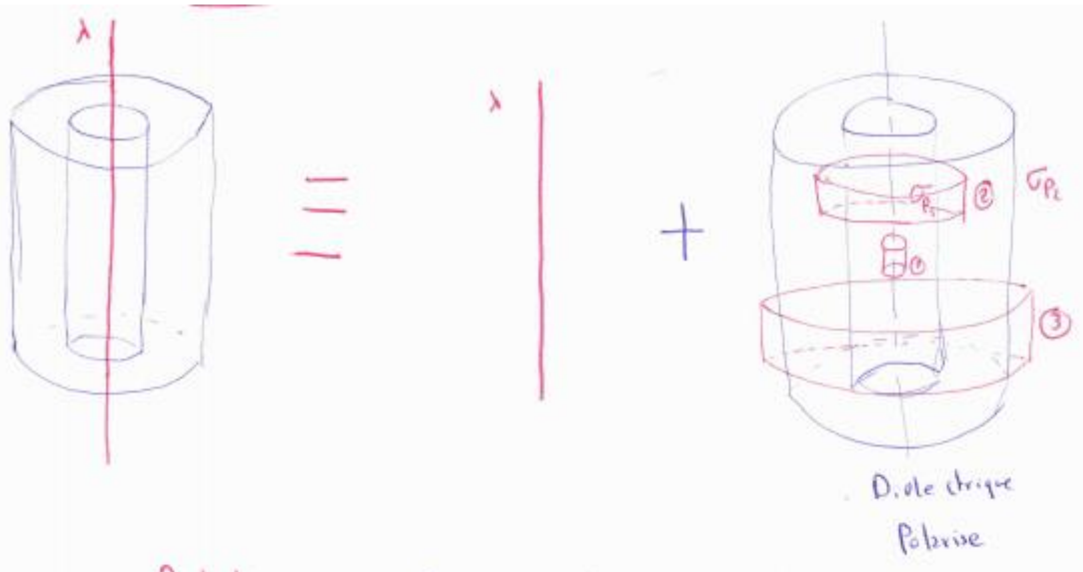
En general on a $\vec{A}\begin{vmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{vmatrix}$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$\vec{P}\begin{vmatrix} P_r = P(r) \\ P_\varphi = 0 \\ P_z = 0 \end{vmatrix}$

$$\mathrm{div}\,\vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r} \times \frac{\lambda}{2\pi \cancel{r}}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\right) = 0$$

$\boxed{\rho_{Pol} = 0}$ => pas de charge En volume.



Dielectrique Polarisé $\Rightarrow$ Distribution de charge dans le vide (chargée en surface σ_{P_1} et σ_{P_2})

Théorème De Gausse : symétrie cylindrique

$$\vec{E}_P = E_r(r)\,\vec{e_P}$$

$\Rightarrow$ Surface de Gauss : cylindre de rayon r de hauteur h centré sur ZZ'

Zone 1 : $r < R_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}_{P_1} = \vec{0}}$

cylindre ①

Zone 2 $R_1 < r < R_2$

cylindre ②

$$E_{P_2}\, 2\pi r\cancel{h} = \frac{\sigma_{P_1} \times 2\pi R_1 \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{P_2} = \frac{\sigma_{P_1} R_1}{\varepsilon_0 r} = \frac{-\lambda(\varepsilon_r - 1)}{2\pi \cancel{R_1} \varepsilon_r} \times \frac{\cancel{R_1}}{\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{E_{P_2} = \frac{\lambda(\varepsilon_r - 1)}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}}$$ identique à celle trouvé avant

Zone ③ $r > R_2$

Cylindre ③

$$E_{P_3}\, 2\pi r \cancel{h} = \frac{\sigma_{P_1}\, 2\pi R_1 \cancel{h} + \sigma_{P_2} \times 2\pi R_2 \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{P_3} = \frac{\sigma_{P_1} R_1 + \sigma_{P_2} R_2}{\varepsilon_0 r}$$

5/ Rappel

Densite d'energie

$$\omega = \frac{dW}{d\tau} \quad \frac{\text{Energie}}{\text{Unite de volume}}$$

Dans le vide on sait que

$$\boxed{\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}$$

En Présence d'un dielectrique

cette densité devient :

$$\boxed{\left.\frac{dW}{d\tau}\right)_{Systeme} = \frac{1}{2}\varepsilon |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon \vec{D}.\vec{E}}$$

Verification

Dans le vide $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}.\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Pour avoir l'energie de polarisation $\vec{P}$

=> on fait apparaitre $\vec{P}$

on a $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\vec{D}.\vec{E} = \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \vec{P}.\vec{E}$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{P}.\vec{E}}$$

densité d'energie pour polarise Le dielectrique

$$\boxed{\frac{dW_p}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{P}.\vec{E}}$$

densité d'energie nécessaire à La polarisation du dielectrique

Soit un petit element $d\tau(M)$ centré sur M à l'intérieur du dielectrique

$$dW_{p(M)} = \frac{1}{2}\, \vec{P}_{(M)}\, \vec{E}_{(M)}\, d\tau(M) \qquad d\tau = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

ε_r

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\lambda}{2\pi r}\, \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\, \vec{e}_\rho \quad \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\, \vec{e}_\rho \quad r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\lambda^2(\varepsilon_r - 1)}{4\pi^2 r \cancel{r}\, \varepsilon_0 \varepsilon_r}\, \cancel{r}\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\lambda^2(\varepsilon_r - 1)}{4\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r^2}\, \frac{dr}{r}\, d\varphi\, dz$$

$$W_p = \frac{1}{2}\, \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon^2}\right) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{h} dz}_{h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{W_p = \frac{\lambda^2(\varepsilon - \varepsilon)}{4\pi\,\varepsilon^2}\, h \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Energie par unité de longeur

Donc l'energie par unité de longeur

$$w_p \boxed{= \frac{W_p}{h} = \frac{\lambda^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi\,\varepsilon^2}\, \mathrm{Ln}\, \frac{R_2}{R_1}}$$

Exercice 4 :

Partie (A)

1/ $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ sont uniforme et porté par $\vec{e_z}$

$$\vec{E_1} = E_{1z}\,\vec{e_z}$$
$$\vec{E_2} = E_{2z}\,\vec{e_z}$$

$$E_1 \begin{vmatrix} E_{1x} = 0 \\ E_{1y} = 0 \\ E_{1z} = E_{1z} \end{vmatrix} \qquad E_2 \begin{vmatrix} E_{2x} = 0 \\ E_{2y} = 0 \\ E_{2z} = E_{2z} \end{vmatrix}$$

Continuité de la composant tengenciel de E

$$E_{T_1} = E_{T_2}$$

$$E_{1z} = E_{2z} \Rightarrow \vec{E}_1 = E_2$$

$$\vec{E}_1 = -\vec{grad}\, V \longrightarrow E_{1z} = \frac{-\partial V}{\partial z} = -\frac{dV}{dz}$$

$$dV = -E_{1z}\, dz$$

$$\int_1^2 dV = -E_{1z} \int_0^d dz$$

$$V_2 - V_1 = -E_{1z}\, d$$

$$\underbrace{V_1 - V_2}_{V} = E_{1z}\, d \Rightarrow E_{1z} = \frac{V}{d}$$

Donc $\boxed{E_1 = E_2 = \frac{V}{d}}$

a) region I vide $\quad \vec{D}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 = \frac{\varepsilon_0 V}{d} \vec{e}_z$

2/ a) region I vide $\quad \vec{D}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 = \frac{\varepsilon_0 V}{d} \vec{e_z}$

region II diele LHI $\quad \vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2 = \frac{\varepsilon V}{d} \vec{e_3}$

region III $\quad \vec{D}_3 = \vec{0}$

b) On appliquon le théorème de Gausse à $\vec{D}$

$$\oiint D dS = \sum Q_{libre}$$

- Region I : Cylindre 1

$$D_1 dS = \sigma_0 dS$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = D_1$$

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 V}{d}}$$

• Region II : cylindre ②

$$D_2 dS = \sigma_x dS$$

$$\sigma_x = D_2$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{\varepsilon V}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V}{d} = \varepsilon_r \sigma_0}$$

3°/ Determination de $\vec{P}$ et densite de charge (σ_p et ρ_p) de polarisation

• Region III cylindre ③

Dans la region III $\begin{cases} \vec{P} = \vec{0} \\ \sigma_p = 0 \\ \rho_p = 0 \end{cases}$

4°/ a)

$$Q = \sigma_0 S_0 + \sigma_x S_x$$

$$= \sigma_0 (L - x) \ell + x \ell \sigma_x$$

$$\boxed{Q = \frac{\varepsilon_0 V}{d}(L - x)\ell + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V}{d} x \ell}$$

b)

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0}{d}(L - x)\ell + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{d} x \ell}$$

5°/ $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{D}.\vec{E}$

$= \frac{1}{2}\vec{D}_1\vec{E}_1 + \frac{1}{2}\vec{D}_2\vec{E}_2$

$dW = \frac{1}{2}\vec{D}_1\vec{E}_1 d\tau_1 + \frac{1}{2}\vec{D}_2\vec{E}_2 d\tau_2$

$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 d\tau_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 d\tau_2$

$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 \iiint_{\substack{\text{volume}\\ I}} d\tau_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 \iiint_{\substack{\text{volume}\\ II}} d\tau_2$

$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 (L-x)\ell d + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 x\ell d$

$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{V^2}{d}\left[(L-x)\ell + \varepsilon_r x\ell\right]$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0(L-x)\ell}{d} + \frac{\varepsilon x\ell}{d}\right)}_{C}V^2 = \frac{1}{2}CV^2$

On remarque L'energie du Condensateur. $\boxed{W = \frac{1}{2}CV^2}$

6°/

On a :

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \ell V^2}{d}\left((L-x) + \varepsilon_r x\right)$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \ell V^2}{d}\left((L-x) + \varepsilon_r x\right)$$

$$\vec{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\, W$$

$$F_x = +\frac{\partial W}{\partial x} = +\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \ell V^2}{d}(\varepsilon_r - 1)$$

$$\vec{F} = F_x \vec{e_x} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \ell V^2}{d}(\varepsilon_r - 1)\vec{e_x}$$

$\vec{F}$ attire le dielectrique vers les $x>0$

7/ $x = L$

- $C = \frac{x L \ell}{d}$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S'}{d}}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d} V^2}$$

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, W = \vec{0}}$$

Partie B :

Introduction :

Soit une sphère de centre O et de rayon R chargé uniformément ρ

Calculer $E_\rho(M)$ à l'interieur

Symétrie sphérique $\vec{E}_\rho = E_\rho(r)\,\vec{e_r}$

Théo de Gauss : SG : sphère de rayon $r = OM$

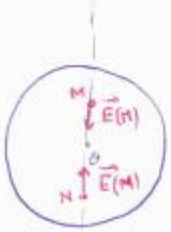
$$E_\rho(r)\, 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_\rho(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OM}$$

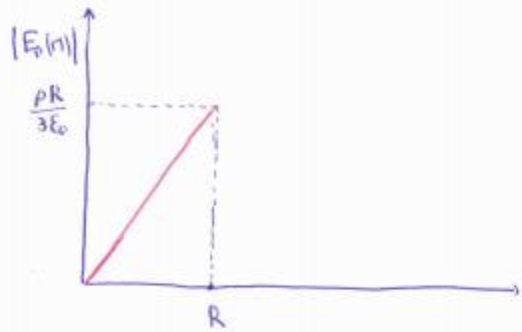
Si ρ est positif $\rho > 0$ ⟶ $\vec{E}(M)$ diriger de $O \to M \Rightarrow \vec{OM}$

" " " negatif $\rho < 0$ ⟶ $E(M)$ diriger de $M \to O \Rightarrow -\vec{OM}$

$\rho < 0$



Le module



Partie B :

$\vec{P} = P\vec{e_z}$ uniforme

$\vec{E} = E\,\vec{e_z}$ uniforme

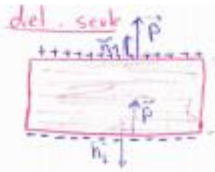
diélectrique est un gaz $\begin{cases} \text{constitué d'atomes } \underline{\text{monoatomique}} \text{ (même type d'atome)} \\ \text{ou} \\ \text{'' molécule : — même molécul (exemple } O_2) \end{cases}$

<u>non polaire</u> :

Pas de dipôle intrinsèque, barycentre des charge ⊕ (noyau) confondu avec celui ⊖ (electron)

1°/ Diélectrique LHI

- $P = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$
- Densité de charge de polarisation
  - * En volume : $\rho_{pol} = -\operatorname{div} P = 0$ car P est uniforme
  - * En surface : $\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ex}$



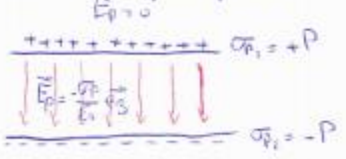
$\sigma_{p_1} = \vec{P}.\vec{n}_1 = P$

$\sigma_{p_2} = \vec{P}.\vec{n}_2 = -P$

$$\sigma_{p_1} = +P = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

$$\sigma_{p_2} = -P = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

2°/ Le dielectrique polarisé P est equivalent à un condensateur de charges dans le vide



$$\vec{E}_p = -\frac{P}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E}{\varepsilon_0} = -(\varepsilon_r - 1)\vec{E}}$$

3°/

$\vec{E}_0 = E\vec{e}_z$

On creuse une cavité sphérique de rayon R très petit avec $R \simeq$ Rayon de l'atome.

~~Avant de~~ ~~étudier~~

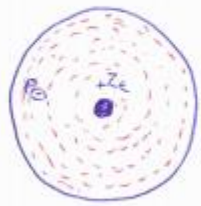
$$\boxed{\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_p = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

champ à l'interieur de la cavité

Relation de LORENTZ

4°/ L'atome etudier

On assimile
- le noyau a une charge ponctuel $\bullet^{+Ze}$
- les electrone a un nuage electronique $\equiv$ sphère chargé uniformement ρ (centre O, rayon R)



$$\rho_\ominus = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{-3Ze}{4\pi R^3}$$

Le nuage etant fixe (indéformable)

Sous l'action du champ E_{loc} l'atome subit le champ E_{loc}

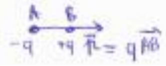
Le noyau : la charge $+Ze$ sera semise à une $\overrightarrow{\text{force}}_{\text{locale}}$ $Ze.\vec{E}_{loc} = F_{loc}$

qui le deplace vers le haut

$\Rightarrow$ Décalage entre $+Ze$ et $-Ze$

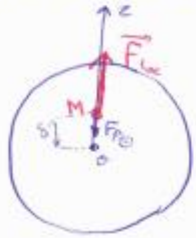
$\Rightarrow$ Creation d'un dipôle de moment dipolaire :

$\cancel{\vec{p} = Ze\delta \vec{e}_z}$ $\vec{p} = Ze\,\delta\,\vec{e}_z$

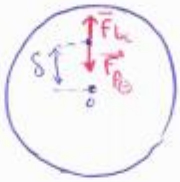


5/ Dès qu'il y'a decalage, La charge $+Ze$ est soumise à deux force

$$\begin{cases} \vec{F}_{loc} = +Ze\,\vec{E}_{loc} \\ \vec{F}_{P_\ominus} = Ze\,\vec{E}_{P_\ominus}(M) \end{cases}$$



À L'equilibre



$$\vec{F}_{loc} + F_{P_\ominus} = 0$$

$$Ze\,E_{loc} + Ze\,E_{P_\ominus} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{loc} = -\vec{E}_{P_\ominus}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{P_\ominus}(M) = \frac{\rho_\ominus \vec{OM}}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_\ominus \delta \vec{e_z}}{3\varepsilon_0}$$

avec $\rho_\ominus = \frac{-3Ze}{4\pi R^3}$

$$\vec{E}_{P_\ominus} = \frac{-3Ze}{4\pi R^3} \times \frac{\delta}{3\varepsilon_0}\vec{e_z} = -\frac{Ze\,\delta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{e_z}$$

A L'equilibre

$$|\vec{E}_{loc}| = |\vec{E}_{P_\ominus}| = \frac{Ze\,\delta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Donc $\boxed{\delta = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 E_{loc}}{Ze}}$ a

$$\vec{p} = Ze\,\vec{OM} = Ze\,\delta\,\vec{e_z} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_{loc}\,\vec{e_z}$$

c $\boxed{\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_{loc}}$

$= \alpha_{e,i,o} \vec{E}_{loc}$

e : electronique
i : ionique
o : orientation

$\Rightarrow$ b $\boxed{\alpha_e = 4\pi\varepsilon_0 R^3}$

6°/ Relation De CLAUSIUS-Mossotti

$\left.\begin{array}{l}\alpha \\ \varepsilon_0 \\ \varepsilon_r\end{array}\right)$ et n

chaque atome crée un dipole $\vec{p}$

si on a n atome/unité de volume $\Rightarrow$ on aura $n\vec{p}$ dipole/unité de volume

Donc la polarisation $\vec{P}$

$\boxed{\vec{P} = n\vec{p}}\boxed{= n\alpha\vec{E}_{loc}}$ avec $\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

$$\frac{\vec{P}}{n\alpha} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{P}\left(\frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\right) = \vec{E}$$

$$\vec{P}\left(\frac{3\varepsilon_0 - n\alpha}{3\varepsilon_0 n\alpha}\right) = \vec{E}$$

$3\varepsilon_0 - n\alpha$

Dielectrique LHI

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

$$\cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\cancel{E} = \frac{3\cancel{\varepsilon_0}\, n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\cancel{E}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \frac{3n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}$$

$$(\varepsilon_r - 1)(3\varepsilon_0 - n\alpha) = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0\varepsilon_r - \varepsilon_r n\alpha - 3\varepsilon_0 + n\alpha = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = n\alpha(\varepsilon_r + 2)$$

Relation de Clausius Mossotti

$$\boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}$$

7/

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{n\, 4\pi\varepsilon_0 R^3}{3\varepsilon_0}$$

Donc la polarisation P

$$\boxed{\vec{P} = n\vec{p}} \boxed{= n\alpha \vec{E}_{loc}} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\frac{\vec{P}}{n\alpha} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{P}\left(\frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\right) = \vec{E}$$

$$\vec{P}\left(\frac{3\varepsilon_0 - n\alpha}{3\varepsilon_0 n\alpha}\right) = \vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0 n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\vec{E}$$

Dielectrique LHI

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

$$\cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\cancel{E} = \frac{3\cancel{\varepsilon_0} n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\cancel{E}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \frac{3n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}$$

$$(\varepsilon_r - 1)(3\varepsilon_0 - n\alpha) = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0\varepsilon_r - \varepsilon_r n\alpha - 3\varepsilon_0 + n\alpha = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = n\alpha(\varepsilon_r + 2)$$

Relation de Clausius Mossotti
$$\boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}$$

7°/

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{n\, 4\pi\cancel{\varepsilon_0} R^3}{3\cancel{\varepsilon_0}}$$

Ex 2 Vérification des relations de passage entre 2 milieux.

* $\boxed{\text{A l'intérieur } r = OM < R}$.

$$\vec{E}_{pol}(M) = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\underbrace{(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)}_{\vec{e}_z} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\vec{e}_z = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol}(M) = E_0\,\vec{e}_z + \vec{E}_{pol}(M)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(M)\big|_{in} &= \left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r + \left(\frac{P}{3\varepsilon_0} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ &= (E_r)_{in}\,\vec{e}_r + (E_\theta)_{in}\,\vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}(M) = \varepsilon\vec{E}(M) &= \varepsilon\left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r + \varepsilon\left(\frac{P}{3\varepsilon_0} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ &= (D_r)_{in}\,\vec{e}_r + (D_\theta)_{in}\,\vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

* $\boxed{\text{A l'extérieur } r = OM > R}$

$$\vec{E}_{pol}(M) = \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\,\vec{e}_r + \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{E}(M)\big|_{ex} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol}(M) = E_0\,\vec{e}_z + \vec{E}_{pol}(M)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(M)\big|_{ex} &= \left(E_0 + \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r + \left(\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ &= (E_r)_{ex}\,\vec{e}_r + (E_\theta)_{ex}\,\vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}(M) = \varepsilon_0\vec{E}(M) &= \varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r + \varepsilon_0\left(\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{D}(M)\big|_{ex} &= (D_r)_{ex}\,\vec{e}_r + (D_\theta)_{ex}\,\vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

Vérification des relations de passage :

a/ Continuité de la Composante tangentielle de $\vec{E}$

$$\Big[(E_\theta)_{in} = (E_\theta)_{ex}\Big]_{r=R} \Rightarrow \left(\frac{P}{3\varepsilon_0} - E_0\right)\sin\theta = \left(\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 R^3} - E_0\right)\sin\theta \qquad \underline{\text{Vérifiée}}$$

b/ Continuité de la Composante Normale de $\vec{D}$ car la Surface de séparation ne contient pas de charge libre ($\sigma_{lib} = 0$).

$$\Big[(D_r)_{in} = (D_r)_{ex}\Big]_{r=R} \longrightarrow \varepsilon\left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right)\cancel{\cos\theta} \overset{?}{=} \varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 R^3}\right)\cancel{\cos\theta}$$

$$\longrightarrow \varepsilon\left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2P}{3\varepsilon_0}\right) \rightarrow \text{il faut chercher une relation entre } \vec{E}_0 \text{ et } \vec{P}$$

on a $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\left(\vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \Rightarrow \vec{P}\left(1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\right) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{P}\left(\frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0}\right) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 = \frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}\vec{P}} \qquad \underline{\text{Donc}}\quad \varepsilon\left(\frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\right)\cancel{P} = \varepsilon_0\left(\frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)} + \frac{2}{3\varepsilon_0}\right)\cancel{P}$$

$$\varepsilon\big(2\varepsilon_0 + \varepsilon - (\varepsilon - \varepsilon_0)\big) = \varepsilon_0\big(2\varepsilon_0 + \varepsilon + 2(\varepsilon - \varepsilon_0)\big)$$

$$\varepsilon\big(2\varepsilon_0 + \cancel{\varepsilon} - \cancel{\varepsilon} + \varepsilon_0\big) = \varepsilon_0\big(\cancel{2\varepsilon_0} + \varepsilon + 2\varepsilon - \cancel{2\varepsilon_0}\big)$$

$$3\varepsilon_0\varepsilon = 3\varepsilon_0\varepsilon \qquad \underline{\text{Vérifiée}}$$

Mr Chaib

6/ Etablir la relation de CLAUSIUS_MOSSOTTI

liant les grandeurs $\alpha, \varepsilon_0, \varepsilon_r$ et n

n nb d'atomes/unité de volume ou nb de Molécules/unité de Volume.

On a vu que chaque atome crée un dipôle $\vec{p} = \alpha \vec{E}_{loc}$ avec $\boxed{\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3}$

Si on a n atomes ou molécules / unité de volume $\longrightarrow$ on aura $n\vec{p}$ dipôle/unité de volume

Donc la Polarisation $\boxed{\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\vec{E}_{loc}}$ ①

$$\text{Avec } \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$① \Rightarrow \text{Avec } \vec{E}_{loc} = \frac{\vec{P}}{n\alpha} \Rightarrow \frac{\vec{P}}{n\alpha} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{P}\left(\frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\right) = \vec{E}$$

$$\longrightarrow \vec{P}\left(\frac{3\varepsilon_0 - n\alpha}{3\varepsilon_0 n\alpha}\right) = \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \frac{3\varepsilon_0 n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\vec{E}$$

$$\text{or on diel (lhi)} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \Rightarrow \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E} = \frac{3\varepsilon_0 n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\vec{E}$$

$$\longrightarrow (\varepsilon_r - 1) = \frac{3n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha} \Rightarrow (\varepsilon_r - 1)(3\varepsilon_0 - n\alpha) = 3n\alpha \Rightarrow 3\varepsilon_0\varepsilon_r - n\alpha\varepsilon_r - 3\varepsilon_0 + n\alpha = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = n\alpha(\varepsilon_r + 2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}$$ Relation de CLAUSIUS MOSSOTTI.

$$\text{Avec } \alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \longrightarrow \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = n \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{3\varepsilon_0} = n \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$$

7/ Calculer le rayon R de l'atome :

$$\text{on a : } \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{4\pi n R^3}{3} \Rightarrow \boxed{R^3 = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{4\pi n \cdot (\varepsilon_r + 2)}}$$

ε_r : connu

n : inconnu

Donc il faut calculer n : sachant que : La masse Molaire est : $M = 28\,g$; La masse volumique $\rho_v = 1300\,g/m$

La Masse molaire M est la masse de $\mathcal{N}$ atomes ou molécules) $\mathcal{N}$: nb d'Avogadro $\mathcal{N} = 6{,}023 \times 10^{23}$

$$\mathcal{N} \text{ atomes} \longrightarrow M(g) \longrightarrow 1g \longrightarrow \frac{\mathcal{N} \text{ atomes}}{M}$$

ds l'unité de volume on a $(\rho_v\, g) \longrightarrow n = \frac{\rho_v \cdot \mathcal{N}}{M}$ atoms/unité de volume $\Rightarrow n = 28 \times 10^{24}$ atoms/m^3

A.N : $R^3 =$ $\Rightarrow R \simeq 1{,}2 \times 10^{-10}\,m = 1{,}2\,Å$ //