

Exercice (Equation de Clausius-Mossotti)

En physique, la relation **Clausius-Mossotti** relie la permittivité relative ϵ_r d'un diélectrique à la polarisabilité α des atomes ou molécules constituant le diélectrique. La permittivité relative est une propriété en vrac (macroscopique) et la polarisabilité est une propriété microscopique de la matière; par conséquent, la relation fait le pont entre une propriété macroscopique directement observable et une propriété moléculaire microscopique. L'équation de Clausius-Mossotti pour la matière diélectrique constituée d'atomes ou de molécules (non polaires) est:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} N\alpha,$$

où ϵ_0 est la constante électrique (permittivité du vide) et N est la densité en nombre (nombre d'atomes ou de molécules par unité de volume).

L'indice de réfraction n d'un diélectrique est donné par:

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r},$$

La substitution de cette valeur de n donne la relation **Lorentz-Lorenz**:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} N\alpha.$$

Démonstration

Considérons un diélectrique de densité en nombre N (nombre de particules par unité de volume) dans un champ électrique externe \mathbf{E} . La somme de \mathbf{E} et d'un champ interne \mathbf{E}_{int} (champ dépolarisant) induit un dipolaire \mathbf{p}_{ind} sur chaque particule. Le vecteur de polarisation \mathbf{P} est la somme des dipôles induits:

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}_{\text{ind}}.$$

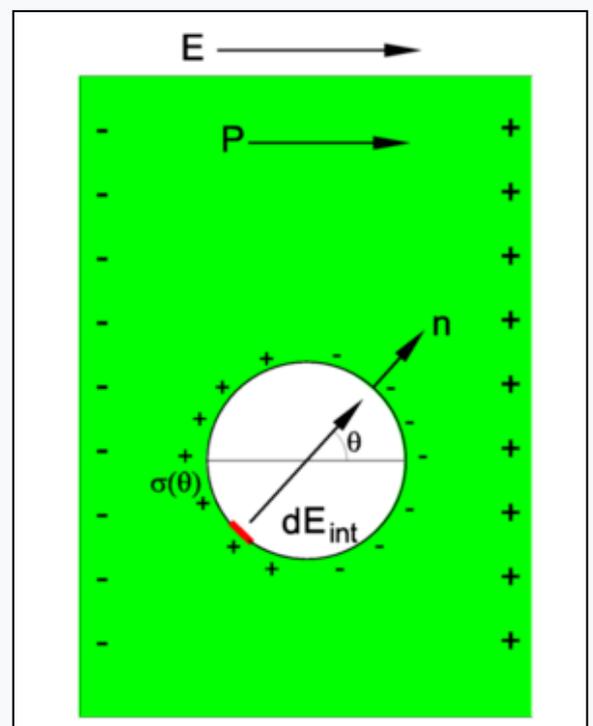
De la relation entre \mathbf{P} , le déplacement électrique \mathbf{D} et le champ électrique \mathbf{E} on écrit:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}.$$

Pour obtenir une expression pour \mathbf{p}_{ind} , nous considérons une seule particule (molécule ou atome) dans une petite cavité sphérique à l'intérieur du diélectrique. déterminons d'abord le champ total à l'intérieur de cette cavité.

Une plaque macroscopique de diélectrique est placée dans un champ électrique externe \mathbf{E} (selon la direction z) qui polarise le diélectrique, de sorte qu'une densité de charge est créée sur les surfaces externes perpendiculaires à \mathbf{E} . Puisque \mathbf{E} "pousse" la charge positive et "attire" la charge négative, le signe de la densité de charge sur les surfaces extérieures est comme indiqué sur la figure. Le vecteur de polarisation \mathbf{P} pointe par définition de charge négative à charge positive. Les densités de charge de surface sont en valeur absolue égales à $|\mathbf{P}| \equiv P$

Une cavité sphérique infinitésimalement petite de rayon r est faite dans le diélectrique et à l'intérieur de laquelle il y a un vide avec une permittivité ϵ_0 . La cavité est si petite que le vecteur de polarisation \mathbf{P} n'en est pas affecté. Si la cavité avait été rectangulaire avec des parois parallèles aux surfaces macroscopiques chargées de la dalle, la densité de charge sur les parois de la cavité aurait été la même (en valeur absolue)



que sur les surfaces extérieures de la dalle (P), par neutralité e charge électrique. Puisque la surface de la cavité est sphérique, elle a la densité de charge:

$$\sigma(\theta) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = -P \cos \theta,$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface de la cavité au point θ , (voir la figure). Par définition, la direction positive de \mathbf{n} est vers l'extérieur. Un élément de surface infinitésimal à $\theta + \pi$ (rouge sur la figure)

Un élément de surface infinitésimal en $\theta + \pi$:

$$d\Omega = r^2 |\sin(\pi + \theta)| d\theta d\phi = r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

sur la paroi de la cavité donne une contribution au champ électrique interne $d\mathbf{E}_{\text{int}}$ parallèle à \mathbf{n}

$$d\mathbf{E}_{\text{int}} = \mathbf{n} \frac{\sigma(\pi + \theta) d\Omega}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\mathbf{n} \frac{P \cos(\pi + \theta) d\Omega}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \mathbf{n} \frac{P \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0}.$$

La composante z de \mathbf{n} est $\cos \theta$ et donc la contribution au champ dans la direction z est:

$$dE_{\text{int},z} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} (\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Les contributions dans une autre direction que z s'annulent mutuellement. L'intégration sur toute la surface donne:

$$E_{\text{int},z} = \iint dE_{\text{int},z} = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi (\cos \theta)^2 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{3\epsilon_0} P.$$

Le champ électrique total dans la cavité (le "champ local de Lorentz") est dans la direction z et a une magnitude:

$$E_{\text{tot}} = E + E_{\text{int}} = E + \frac{1}{3\epsilon_0} P.$$

Revenons à la démonstration de la relation **Clausius-Mossotti**

où nous avons introduit les grandeurs absolues des vecteurs, ce qui est autorisé car ils se trouvent tous le long de l'axe z, la direction de E. Le champ E_{tot} est souvent appelé champ local de Lorentz (et dans ce contexte désigné comme E_{loc}). L'approximation du champ local de Lorentz est basée sur l'hypothèse que les interactions à longue distance sont isotropes et n'est donc réaliste que pour les liquides et les solides isotropes.

Maintenant

$$p_{\text{ind}} = \alpha E_{\text{tot}} = \alpha \left(E + \frac{1}{3\epsilon_0} P \right) = \alpha E \left(1 + \frac{\epsilon_r - 1}{3} \right)$$

d'où l'équation:

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = N \alpha E \left(1 + \frac{1}{3} (\epsilon_r - 1) \right) \implies \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) = \frac{N \alpha}{3} (2 + \epsilon_r),$$

d'où découle directement la relation Clausius-Mossotti.