Exercice Démonstration de l'équation de Debye (polarisation d'orientation)

En 1929, Debye présenta dans son article intitulé "Polar Molecules" une généralisation sur le comportement des matériaux ayant une polarisabilité d'orientation, dans la région où la polarisation diélectrique présente une relaxation. Cette relaxation se manifeste quand la période de l'onde électromagnétique est comparable au temps nécessaire à l'alignement de la molécule. En d'autres termes, lorsque la fréquence appliquée est trop grande devant celle correspondante au temps de relaxation, la permittivité relative est appelée: la constante diélectrique relative infinie, notée ε_∞ , et qui représente la polarisation atomique (ionique) et électronique. Dans ce cas, elle n'est plus fonction de ω. Pour des fréquences assez inférieures, la permittivité relative devient la constante diélectrique relative statique qu'on note ε_s .

Afin d'établir une relation fréquentielle de la permittivité diélectrique, on doit trouver une relation de la forme: $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + f(\omega)$ (1)

où $f(\omega)$est une fonction de fréquence qui se réduit, lorsque $\omega \rightarrow$, à: $f(0) = \varepsilon_s - \varepsilon_\infty$ (2)

Supposant maintenant qu'un champ électrique appliqué pour aligner les molécules est supprimé. La polarisation et par conséquent le champ interne va diminuer. Debye a supposé que cette polarisation P décroît exponentiellement avec le temps par une constante de temps τ , qui représente le temps de relaxation caractéristique au moment dipolaire de la molécule. Cette polarisation est donnée par la formule suivante:

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (3)$$

La fonction recherchée $f(\omega)$ est reliée à la polarisation par la transformée de Fourier:

$$f(\omega) = K.\int_0^\infty P(t)e^{j\omega t}dt = \frac{KP_0}{j\omega+\frac{1}{\tau}} \qquad (4)$$

où K est une constante qui assure pour $f(\omega)$ une dimension correcte. En utilisant la condition donnée par (2), on obtient:

$$KP_0.\tau = \varepsilon_s - \varepsilon_\infty \qquad (5)$$

L'équation (4) devient alors:

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_s-\varepsilon_\infty}{1+j\omega\tau} \qquad (7)$$

L'équation (7) est dite: modèle de Debye ou équation de Debye

Si on sépare les parties réelle et imaginaire de $\varepsilon^*(\omega)$, $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$, on peut réécrire

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{\omega\tau(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + (\omega\tau)^2}$$