Epreuve du 27 février 2013

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices sont interdites. On attend donc dans les applications numériques des ordres de grandeur raisonnables. Les données utiles sont rassemblées à la fin de l'énoncé.

Prière de rédiger les questions de cours et l'exercice d'une part, le problème d'autre part sur deux copies différentes.

I. Questions de cours

1. Donner des exemples de milieux diélectriques et expliquer succinctement pour quelle raison l'action d'un champ électrique extérieur peut provoquer l'apparition de dipôles électriques à l'échelle atomique.
2. Rappeler la définition du vecteur polarisation $\vec{P}$ et sa dimension.
3. Rappeler les expressions des densités de charge volumique et surfacique de polarisation et du vecteur densité de courant de polarisation, en définissant bien les grandeurs impliquées.
4. Donner les équations de Maxwell (en les nommant) dans un milieu diélectrique non magnétique.
5. Dans le cas d'un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope parfaitement isolant (i.e. tel que $\rho_{libres} = 0$ et $\vec{j}_{libres} = 0$), établir l'équation de propagation des champs électrique et magnétique. Dans le cas particulier d'une onde plane, $\vec{E}$ s'écrit $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$. En déduire alors la relation de dispersion.
6. Quelle est la relation entre le vecteur polarisation $\vec{P}$ et le champ électrique total $\vec{E}$ dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope ? Ecrire la relation *générale* entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$, et en déduire comment elle se transforme dans le cas particulier d'un diélectrique linéaire homogène isotrope.

II. Exercice : polarisation d'un cylindre évidé

On considère un cylindre de rayon a, infiniment long, qui contient une densité volumique uniforme de charges positives, ρ_0, placées dans le vide. Ce premier cylindre est placé à l'intérieur d'un autre cylindre évidé, de même axe, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b. Ce deuxième cylindre contient un diélectrique parfait LHI, de permittivité relative ε_r. Le milieu extérieur aux 2 cylindres, pour $r > b$, est le vide.

1. Rappelez l'équation de Maxwell-Gauss vérifiée par le vecteur déplacement $\vec{D}$.
2. En déduire l'expression intégrale du théorème de Gauss en fonction de $\vec{D}$.
3. Utilisez cette variante du théorème de Gauss pour calculer le vecteur $\vec{D}$ pour $a < r < b$ et pour $r > b$.
4. En déduire le champ électrique $\vec{E}$ dans les 2 domaines.
5. Déduire des questions précédentes l'expression de la polarisation $\vec{P}$ pour $a < r < b$ et pour $r > b$.
La polarisation est-elle uniforme dans le diélectrique ?
6. Déterminer les densités de charges de polarisation surfaciques et volumiques du diélectrique.
On rappelle l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques :

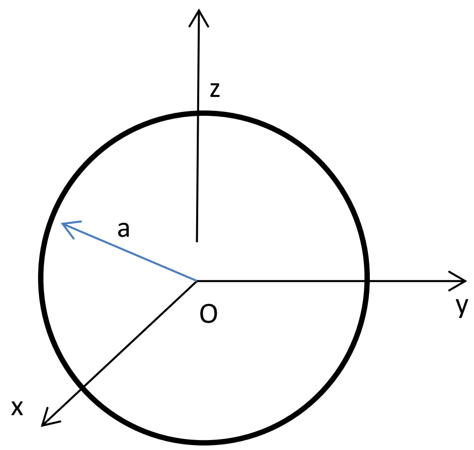
$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

7. Vérifiez que la charge totale comprise dans le diélectrique est nulle.

III. Problème : réponse optique de nano-objets métalliques

Lorsque la taille d'un objet est réduite à l'échelle de quelques nanomètres, son interaction avec une onde électromagnétique dans le domaine optique est modifiée par rapport à celle du matériau massif dont il est constitué.

On s'intéresse ici à la réponse optique d'une particule métallique, sphérique, de rayon a valant quelques nanomètres, placée dans le vide au point O. On utilisera le modèle suivant : l'ensemble des électrons de conduction du métal (de charge $-e$) et l'ensemble des ions (de charge $+e$) formant le réseau sont décrits chacun par une boule de rayon a, uniformément chargée, négativement pour les électrons, positivement pour les ions. Les densités volumiques (nombre de particules par unité de volume), électronique et ionique, sont égales et désignées par N.



1. Montrer qu'en tout point de l'espace, le champ électrique $\vec{E}_+$ créé par la boule ionique est radial. Etablir les expressions de ce champ au point $M(\vec{r})$, pour $r < a$ et $r > a$. En déduire le champ $\vec{E}_-$ créé par la boule électronique.
2. On applique un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_S = E_S\vec{u}_z$ avec $E_S > 0$
   a) Justifier qualitativement que les boules électronique et ionique se déplacent l'une par rapport à l'autre selon (Oz).
   On supposera dans toute la suite que la boule ionique reste immobile, de centre O, et que le déplacement électronique est uniforme. On notera $\vec{\delta} = \delta\vec{u}_z = OO'$ le déplacement de la boule électronique de centre O'. On admettra que l'amplitude $|\delta|$ de ce déplacement est petite devant *a*, hypothèse que l'on vérifiera a posteriori.
   b) Montrer que, pour un point M intérieur aux deux boules, le champ électrique $\vec{E}_d = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ dû aux ions et aux électrons s'écrit : $\vec{E}_d = \frac{Ne}{3\varepsilon_0}\vec{\delta}$. En déduire la force exercée par ce champ sur un électron de conduction.
   c) En tenant compte du champ électrique appliqué, exprimer la force totale qui s'exerce sur un électron. Montrer qu'il y a une position d'équilibre pour un déplacement δ_S que l'on explicitera. Commenter le sens de ce déplacement par rapport à celui du champ $\vec{E}_S$.
   d) L'amplitude du champ statique est E_S = 10^6 V.cm^{-1}. La densité d'électrons de conduction dans le sodium est N_{Na} = 2.5 10^{28} m^{-3}. Justifier l'hypothèse faite sur δ.
   e) La séparation des charges donne à la boule métallique un moment dipolaire électrique $\vec{p}_0$. L'exprimer en fonction du champ appliqué $\vec{E}_S$. En déduire la polarisabilité statique α_0 de la boule, définie par $\vec{p}_0 = \alpha_0\varepsilon_0\vec{E}_S$.
3. Le champ électrique appliqué varie maintenant sinusoïdalement, soit en notation complexe $\vec{E}_0 = E_0 e^{i\omega t}\vec{u}_z$. On le suppose uniforme, sans phénomène de propagation. Soit $\vec{\delta}(t)$ le déplacement électronique.
   a) En utilisant les résultats du 2.b, écrire l'équation du mouvement d'un électron de masse *m* soumis au champ appliqué et au champ $\vec{E}_d$.
   On pose $\omega_P = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$, appelée « pulsation plasma ». Montrer que la pulsation propre du mouvement ω_0 vaut $\omega_0 = \frac{\omega_P}{\sqrt{3}}$.
   b) Expliciter $\vec{\delta}(t)$ en régime sinusoïdal permanent. Que constate-t-on pour $\omega \to \omega_0$?
   c) Le modèle précédent s'applique aux métaux alcalins. Donner la valeur de la pulsation propre ω_0 pour le sodium (N_{Na} = 2.5 10^{28} m^{-3}).
   Les mesures expérimentales d'absorption donnent $\omega_0 \approx 4{,}9 10^{15} s^{-1}$ pour le sodium. Comparer à la valeur théorique. A quel domaine spectral correspond cette pulsation ?

4. Le champ électrique oscillant est en fait celui d'une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω, polarisée linéairement selon *z*, et se propageant selon *x*. Le champ est donné en notation complexe par : $\vec{E}_0 = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$.
   a) On suppose que la sphère a un rayon a = 5 nm et que l'onde électromagnétique est dans le domaine visible. Justifier que l'on puisse négliger la variation spatiale de $\vec{E}_0$ sur l'extension de la particule.
   On prendra donc par la suite le champ en $x = 0$.
   b) On suppose que le mouvement des électrons est amorti par des collisions ; cet effet peut être décrit phénoménologiquement par une force de frottement fluide s'opposant au mouvement de chaque électron : $\vec{F}_f = -m\gamma\dot{\vec{\delta}}$, avec $\gamma << \omega_0$.
   Donner l'équation du mouvement d'un électron. En déduire l'expression du déplacement $\delta = \delta_0 e^{i\omega t}$ en régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω.
   Exprimer $|\delta_0|$ en fonction de ω.
   Montrer qu'une résonance se produit pour $\omega \approx \omega_0$. Donner la valeur maximale $|\delta_0|_{\max}$ à la résonance.

<u>Données utiles :</u>

k_B = *1.38* 10^{-23} *SI*

ε_0 = *8.85* 10^{-12} *SI*

Masse de l'électron : m = 9.1 10^{-31} *kg*

Charge élémentaire : e = 1.6 10^{-19} *C*

Vitesse de la lumière dans le vide : c = 3 10^{8} *m.s*$^{-1}$