Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen — **2019-2020**
Département de Mathématiques — **Fiche TD1**
Module: Analyse numérique 2

Exercice : Soit le système linéaire $Ax = b$ suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système linéaire par la méthode de GAUSS avec pivot.
2. Factoriser la matrice A, calculer le déterminant de A et calculer A^{-1}.

Solution :1)

Etape1

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{2} & -1 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -8 & L_2 \leftarrow L_2 - (1/2)\, L_1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - (1/2)\, L_1 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 & L_4 \leftarrow L_4 - (1/2)\, L_1 \end{array}$$

Etape2

$$\begin{array}{cccc|cl} 2 & -1 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 1/2 & 1/2 & 2 & L_2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 8 & L_3 \leftarrow L_3 - (+3) L_2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 9/2 & 14 & L_4 \leftarrow L_4 - (+1) L_2 \end{array}$$

Etape3

$$\begin{array}{cccc|cl} 2 & -1 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 & L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 & L_3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 & L_4 \leftarrow L_4 - (-1)\, L_3 \end{array}$$

On obtient donc le système triangulaire supérieure.

$$\begin{array}{cccc|cl} 2 & -1 & 3 & -3 & -20 & L_1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 & L_2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 14 & L_4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3/2 \\ -1 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } \det(A) = 8.$$

$$AA^{-1} = I \quad \Rightarrow LU \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$LU \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \\ a'_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \\ a'_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$LU \begin{pmatrix} a'_{12} \\ a'_{22} \\ a'_{32} \\ a'_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_{12} \\ a'_{22} \\ a'_{32} \\ a'_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ -3/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$LU \begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \\ a'_{33} \\ a'_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \\ a'_{33} \\ a'_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$LU \begin{pmatrix} a'_{14} \\ a'_{24} \\ a'_{34} \\ a'_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_{14} \\ a'_{24} \\ a'_{34} \\ a'_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$