Solution de la série de TD N° 2. M.Q 2020

Exo1:

$$\Psi(x,t) = C \exp(-\lambda|x|)\exp(i\omega t)$$

La dimension de λ: $[\lambda|x|] = 1 \Rightarrow [\lambda].[x] = 1$, $[\lambda] = \frac{1}{[x]} \Rightarrow [\lambda] = L^{-1}$

La constante de normalisation C.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)\Psi^*(x)\, dx = |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda|x|} dx$$

$$= 2|C|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda x} \quad \text{car } e^{-2\lambda|x|} \text{ est une fct paire.}$$

$$= 2|C|^2 \left(\frac{e^{-2\lambda x}}{-2\lambda}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{|C|^2}{\lambda} \Rightarrow |C| = \sqrt{\lambda}$$

donc $C = \sqrt{\lambda}$ à une phase près.

on prendra C réel par la suite.

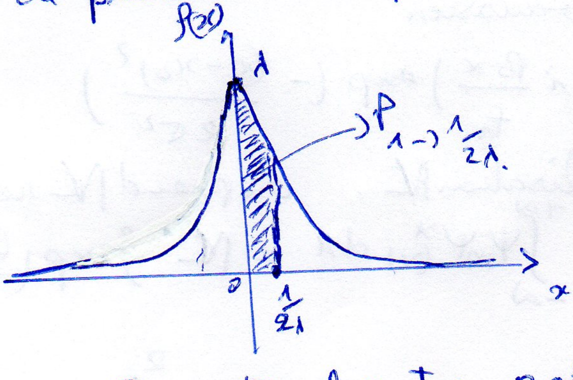
La raison physique de normalisation : $|\Psi|^2 dx$ represente physiquement la probabilité de trouver la particule dans un intervalle dx et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx$ représente la sommation sur toute les positions possible donc doit être égal à 1

/ La fonction densité de probabilité de présence.

$$\rho(x) = |\Psi|^2 = |C|^2 e^{-2\lambda|x|}$$

$$x = 0 \quad \rho(x) = e^{-2\cdot 0} . \lambda$$

$$\boxed{\rho(x) = \lambda e^{-2\lambda|x|}}$$



La probabilité de trouver la particule entre 0 et $\frac{1}{2\lambda}$

$$P_{0\to\frac{1}{2\lambda}} = \int_0^{1/2\lambda} |\Psi|^2 dx = |C|^2 \int_0^{1/2\lambda} e^{-2\lambda x} dx = \frac{|C|^2}{-2\lambda} e^{-2\lambda x}\Big|_0^{1/2\lambda}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2\lambda x}\Big|_0^{1/2\lambda} = -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2\lambda}{2\lambda}} - e^0\right) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

$$\boxed{P_{0\to\frac{1}{2\lambda}} = 0,313}$$

) La valeur moyenne de x, x^2 et l'écart quadratique moyen de la position

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, |\Psi(x)|^2 dx$$

on a : x fct impaire, $|\Psi(x)|^2$ fct paire $\Big\}$ $x|\Psi|^2$: fct impaire

$$= |C|^2 \int x\, e^{-2\lambda|x|} dx$$

donc $\langle x\rangle = |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2\lambda|x|} dx = 0$

$\Rightarrow \langle x\rangle = 0$

• $\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx = 2|C|^2 \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-2\lambda x} dx$ car $x^2 e^{-2\lambda|x|}$ fct paire

on utilise $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$ posont $|C|^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\lambda x} dx = I$

Posons $2\lambda x = u \Rightarrow du = 2\lambda dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2\lambda} du$

donc ~~<x²>~~ I devient

$I = \frac{1}{2\lambda} \lambda \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{4\lambda^2} e^{-u} du = \frac{\lambda}{8\lambda^2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = 1$

$I = \frac{1}{8\lambda^2} 2! \Rightarrow I = \frac{1}{2\lambda^2}$

$\Rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{1}{2\lambda^2}$

l'écart quadratique moyen. $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$

$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}}$

Exercice 2 :

Le paquet d'onde Gaussien

$\Psi(x) = N \exp(i\frac{p_0 x}{\hbar}) \exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})$

1/ La constante de normalisation N. on prend N réel

$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)\Psi^*(x) dx = N^2 \int \exp(\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}) dx$

$= N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\frac{1}{\sigma^2}x^2 - \frac{2xx_0}{\sigma^2} + \frac{x_0^2}{\sigma^2})) dx = N^2 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{\sigma}} \exp(-(-\frac{x_0^2}{\sigma^2} + \frac{4x_0^2/\sigma^4}{4\frac{1}{\sigma^2}}))\right]$

$1 = N^2 (\sqrt{\pi}\cdot\sigma\, e^0) = N^2 \sqrt{\pi}\cdot\sigma$

$\Rightarrow N^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} \Rightarrow \boxed{N = \left(\frac{1}{\sigma^2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}}$

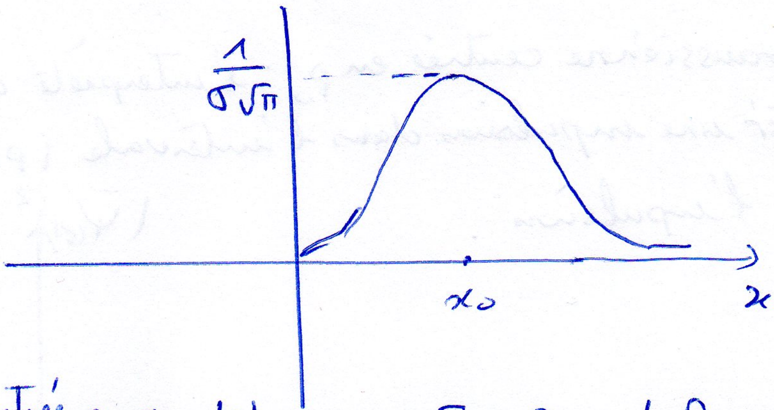
La dimension de C : $\left[\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{[x]^2}{[\sigma^2]^2} \Rightarrow [\sigma]^2 = [x]^2 \Rightarrow [\sigma] = [x]$

$[\sigma] = L$

et $[C] = \frac{1}{[\sigma]^2} = \frac{1}{L^2} \Rightarrow \boxed{[C] = L^{-2}}$

2/ Tracer $\rho(x) = P(x) = |\Psi(x)|^2$.

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}}$$



est une Gaussienne centrée en x_0 de Largeur σ. $\rho(x)$ ~~dx~~ $P(x)\,dx$ = s'interprete comme la probabilité de détecter la particule (lors d'une mesure) dans l'intervalle de position $[x, x+dx]$: $\rho(x) = P(x)$ est une densité de probabilité.

3/ Calculer $\tilde{\Psi}(p)$: (transformée de Fourier de $\Psi(x)$).

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{px}{\hbar}\right) . \Psi(x)\, dx$$

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{px}{\hbar}\right) C \exp\left(i\frac{p_0 x}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2} + i\frac{(p_0-p)}{\hbar}x\right) dx$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\ e^{-i\frac{(p-p_0)}{\hbar}x}\ dx$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{2x_0}{2\sigma^2}x + \frac{x_0^2}{2\sigma^2} - i\frac{(p-p_0)}{\hbar}x\right)\right) dx$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} - \left(\frac{x_0}{\sigma^2} + i\frac{(p-p_0)}{\hbar}\right)x + \frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right)\right) dx$$

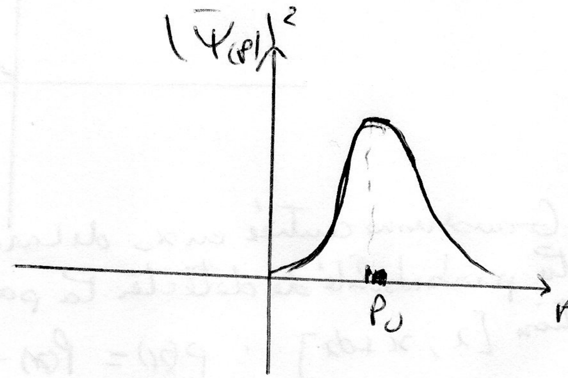
$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} . \sqrt{\pi / \frac{1}{2\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2\sigma^2}}\left(\frac{x_0^2}{\sigma^4} - \frac{(p-p_0)^2}{\hbar^2} + i\frac{2(p-p_0)x_0}{\sigma^2\hbar}\right)\right)$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2 + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2\hbar} 2i(p-p_0)x_0\right)$$

$$= \frac{C\sigma}{\hbar} \exp\left(i\frac{p_0 x_0}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{p_0 x_0}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\left(\frac{\hbar}{\sigma}\right)^2}\right)$$

donc : $\bar{\rho}(p) = |\bar{\Psi}(p)|^2 = \dfrac{c^2\sigma^2}{\hbar^2} \exp\left(-\dfrac{(p-p_0)^2}{(\hbar/\sigma)^2}\right)$

est une Gaussienne centrée en p_0 : s'interprète comme la probabilité de detecter une impulsion dans l'intervale $|p, p+dp|$ lors d'une mesure de l'impulsion.



5/ : $\langle x \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Psi(x)|^2\,dx$

on trouve $\langle x \rangle = x_0$

et $\langle p \rangle = p_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p\,|\bar{\Psi}(p)|^2\,dp$

on utilise l'intégration par partie et l'intégrale de Gauss.

donc : $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

$\Delta x = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}$

$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$

$\Delta p = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\hbar}{\sigma}\right.$

et par suite : $\Delta x . \Delta p = \dfrac{\hbar}{2}$

on trouve que dans le cas d'un paquet d'onde Gaussienne l'énegalité de Heisenberg prend la valeur minimal

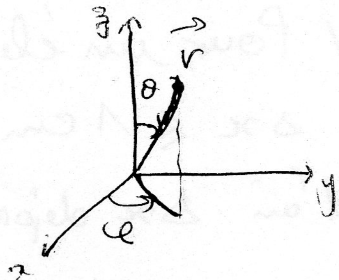
Ex 3 :

$\Psi(r,\theta,\varphi) = N e^{-r/a_0}$ $\qquad a_0 = 0{,}529\,Å$

$d^3r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$: θ varie de 0 à π

φ varie de 0 à 2π

r varie de 0 à ∞



1/ : $1 = \int_V |\Psi|^2 d^3r$

$\int_V |\Psi|^2 d^3r = N^2 \int_\theta \int_\varphi \int_r e^{-2r/a_0} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$

$= N^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-2r/a_0} r^2 dr}_{= I} = N^2 [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} \cdot I$

$I = \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} dr$

posons : $\rho = \frac{2r}{a_0} \Rightarrow r = \frac{a_0 \rho}{2} \Rightarrow dr = \frac{a_0}{2} d\rho$

$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^2 a_0^2}{4} e^{-\rho} \frac{a_0}{2} d\rho = \frac{a_0^3}{8} \int \rho^2 e^{-\rho} d\rho = \frac{a_0^3}{8} \cdot 2!$

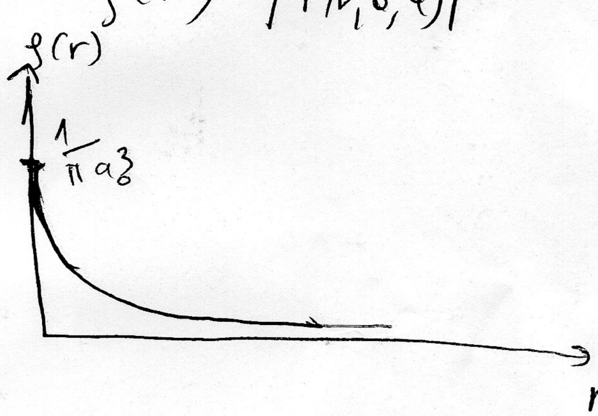
$I = \frac{a_0^3}{4} \Rightarrow \pi N^2 a_0^3 = 1 \Rightarrow |N|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3}$

prenons N réel : $\boxed{N = 1/\sqrt{\pi a_0^3}}$

2/ Densité de probabilité de présence $\rho(\vec{r}) = |\Psi(r,\theta,\varphi)|^2$

$\rho(r) = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$

$\rho(r) = \rho_{max} = \frac{1}{\pi a_0^3}$ ou $r = 0$



Ex 4

1/ Le principe d'incertitude de Heisenberg : $\Delta x . \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ implique

que $\Delta x . \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m}$

où Δx est la largeur de l'onde, et Δv sa dispersion en vitesse.

si à $t=0$, l'onde est localisé c.a.d Δx petit alors Δv et grand donc l'onde se disperse et ne reste pas localisée.

(Au contraire, pou di ... c.a.d Δv petit implique Δx grand) Donc l'onde ne peut rester localisé.

2/ Pour un électron $\frac{\hbar}{m} = 10\ cm^2/s$ donc si à $t=0$

$\Delta x \leq 1\ cm \Rightarrow \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} \geq 0,5\ cm/s$

d'où Δx dépasse 1 cm après $t = 2s$

Au contraire pour une poussière $\frac{\hbar}{m} \geq 10^{-18}\ \frac{m^2}{s}$ on peut avoir

$\Delta x \simeq 10^{-9}\ m$ et $\Delta v = 10^{-9}\ \frac{m}{s}$

donc tous deux très petits.

pour un e^- : $\frac{\hbar}{2m} = \frac{1,05\ 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 0,06\ 10^{-3} = \cancel{m/s}$

donc si à $t=0$ $\Delta x \leq 1\ cm \Rightarrow \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} \geq 0,006\ \frac{m}{s}$ $0,6\ \frac{cm}{s}$

10^{-2}

$\Delta v \geq 0,6\ \frac{cm}{s}$

donc après 2 s Δx dépasse 1 cm.