Vibration des systèmes continus par la Méthode de Rayleigh-Ritz.

La méthode de Rayleigh-Ritz c'est une méthode approchée utile pour des systèmes continus de forme eventuellement complexe, sert à approximer les fréquences propres et la forme des modes propres. les hypothèses raisonnables pour la déformation du système : les déplacements vérifient les conditions aux limites géométriques.

les étapes de calcul :
- calcul des énergies cinétiques et potentielles
- Equations de Lagrange → éqt du Mvt.

- une seule fonction de forme : Méthode de Rayleigh.
- plusieurs fonctions de forme : Méthode de Ritz.

Expressions générales des énergies cinétique et potentielle

- pour les vibrations longitudinales :

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx.$$

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^L ES \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx.$$

- pour les vibrations de flexion :

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx.$$

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

- pour les vibrations de torsion des arbres :

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L J_\theta \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx.$$

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^L GJ_p \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Exemple 1:

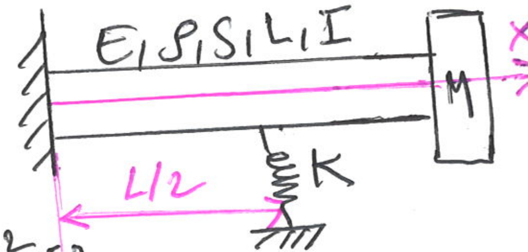
Calculer la plus basse fréquence de la poutre en flexion de la figure suivante par la méthode de Rayleigh. Utiliser la fonction de déplacement $3\left(\frac{x}{L}\right)^2-\left(\frac{x}{L}\right)^3$.

$$\underbrace{v(x,t)}_{\text{Déplacement de flexion}} = \underbrace{[N]}_{\text{Matrice des fcts de déplacement}}\underbrace{\{q\}}_{\text{coord géné}} = \underbrace{[N]}_{\text{Modes propres}}\underbrace{\{A\}}_{\text{Amplitudes}}\sin\omega t$$

Dans notre cas :

$v(x,t) = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]q(t)$; $q(t)$: coordonnée généralisée.

- $E_{c\,poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]^2\dot{q}^2\, dx.$



$$\boxed{E_{c\,poutre} = 0{,}4714\,\rho S L\,\dot{q}^2}$$

- $E_{c\,masse} = \frac{1}{2}M[\dot{v}(L)]^2 = \frac{1}{2}M\left[3\left(\frac{L}{L}\right)^2-\left(\frac{L}{L}\right)^3\right]^2\dot{q}^2$

$$\boxed{E_{c\,masse} = 2M\dot{q}^2}$$

Donc $\boxed{E_c = E_{c\,poutre}+E_{c\,masse} = (0{,}4714\,\rho S L + 2M)\,\dot{q}^2}$

- $E_{p\,poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\frac{6}{L^2}-\frac{6x}{L^3}\right]q^2\, dx$

$$\boxed{E_{p\,poutre} = \frac{6EI}{L^3}q^2}$$

- $E_{p\,ressort} = \frac{1}{2}K\left[v\left(\frac{L}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}K\left[3\left[\frac{L/2}{L}\right]^2-\left[\frac{L/2}{L}\right]^3\right]^2 q^2$

$$\boxed{E_{p\,ressort} = 0{,}1953\,K q^2}$$

$$\boxed{E_p = E_{p\,poutre}+E_{p\,ressort} = \left[\frac{6EI}{L^3}+0{,}1953\,K\right]q^2}$$

En appliquant l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0$$

On trouve : $\left(4M + 0{,}9428\rho SL\right)\ddot{q} + \left(\frac{12EI}{L^3} + 0{,}3906K\right)q = 0$

On prend $q = A\sin \omega t$

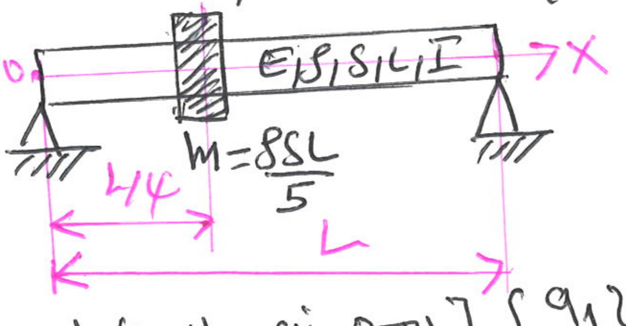
On a $\left\{\left(\frac{12EI}{L^3} + 0{,}3906K\right) - \left(4M + 0{,}9428\rho SL\right)\omega^2\right\}A = 0$

Si $A \neq 0 \Rightarrow \frac{12EI}{L^3} + 0{,}3906K = \left(4M + 0{,}9428\rho SL\right)\omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{12EI/L^3 + 0{,}3906K}{4M + 0{,}9428\rho SL}}}$$

Exemple 2 :

Soit une poutre en flexion appuyée aux deux extrémités et ayant une masse concentrée $M = \frac{\rho SL}{5}$ au quart de sa longueur. Calculer les deux premières fréquences et les modes correspondants par la méthode de Rayleigh-Ritz. Utiliser les fonctions de déplacements $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ avec $n = 1 \ldots 3$



$$v(x,t) = \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

$$v(x,t) = \sin\frac{\pi x}{L}\, q_1 + \sin\frac{2\pi x}{L}\, q_2 + \sin\frac{3\pi x}{L}\, q_3$$

$$E_c = E_{c\,poutre} + E_{c\,masse}$$

$$E_{c\,poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\left[\sin\frac{\pi x}{L}\dot{q}_1 + \sin\frac{2\pi x}{L}\dot{q}_2 + \sin\frac{3\pi x}{L}\dot{q}_3\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\left(\sin^2\frac{\pi x}{L}\dot{q}_1^2 + \sin^2\frac{2\pi x}{L}\dot{q}_2^2 + \sin^2\frac{3\pi x}{L}\dot{q}_3^2\right) dx$$

<u>Rq</u> : les autres termes sont nuls.

$$= \frac{1}{2}\rho S\left[\int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L}\dot{q}_1^2 dx + \int_0^L \sin^2\frac{2\pi x}{L}\dot{q}_2^2 dx + \int_0^L \sin^2\frac{3\pi x}{L}\dot{q}_3^2 dx\right.$$

$$= \frac{1}{2}\rho S\left[\frac{L}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right)\right]$$

$$\boxed{E_{c\,poutre} = \frac{\rho S L}{4}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right)}$$

- $E_{c\,masse} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2_{x=\frac{L}{4}} = \frac{\rho S L}{10}\left(\sin\frac{\pi}{4}\dot{q}_1 + \sin\frac{\pi}{2}\dot{q}_2 + \sin\frac{3\pi}{4}\dot{q}_3\right)^2$

$$\boxed{E_{c\,masse} = \frac{\rho S L}{10}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{q}_3\right]^2}$$

- $E_{p\,poutre} = E_p = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)q_1 + \frac{2\pi}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)q_2 + \frac{3\pi}{L}\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)q_3$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)q_1 - \frac{4\pi^2}{L^2}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)q_2 - \frac{9\pi^2}{L^2}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)q_3$$

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\frac{\pi^4}{L^4}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)q_1^2 + \frac{16\pi^4}{L^4}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)q_2^2 + \frac{81\pi^4}{L^4}\sin^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right)q_3^2\right]dx$$

<u>Rq</u> : les autres termes sont nuls.

$$= \frac{1}{2} EI\frac{\pi^4}{L^4}\left[\frac{L}{2}\left(q_1^2 + 16q_2^2 + 81q_3^2\right)\right] = \frac{EI\pi^4}{4L^3}\left[q_1^2 + 16q_2^2 + 81q_3^2\right]$$

$$\boxed{E_p = \frac{EI\pi^4}{4L^3}\left[q_1^2 + 16q_2^2 + 81q_3^2\right]}$$

- Eqt de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \; ; \; i = 1,3.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\rho S L}{2}\ddot{q}_1 + \frac{EI\pi^4}{2L^3} q_1 = 0 \\ \frac{\rho S L}{2}\ddot{q}_2 + 16\frac{EI\pi^4}{2L^3} q_2 = 0 \\ \frac{\rho S L}{2}\ddot{q}_3 + 81\frac{EI\pi^4}{2L^3} q_3 = 0 \end{cases}$$ (sans masse m)

et avec masse m :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\rho S L}{2}\ddot{q}_1 + \frac{\rho S L}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{q}_3\right] + \frac{EI\pi^4}{2L^3} q_1 = 0 \\ \frac{\rho S L}{2}\ddot{q}_2 + \frac{\rho S L}{5}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{q}_3\right] + 16\frac{EI\pi^4}{2L^3} q_2 = 0 \\ \frac{\rho S L}{2}\ddot{q}_3 + \frac{\rho S L}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{q}_3\right] + 81\frac{EI\pi^4}{2L^3} q_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho S L \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1414 & 0{,}1 \\ 0{,}1414 & 0{,}7 & 0{,}1414 \\ 0{,}1 & 0{,}1414 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \frac{EI\pi^4}{2L^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On prend $q_i = A_i \sin \omega t$ avec $i = 1-3$.

On trouve :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{EI\pi^4}{2L^3} - 0{,}6\rho S L \omega^2\right) & \left(-0{,}1414\,\omega^2 \rho S L\right) & \left(-0{,}1\,\omega^2\rho S L\right) \\ \left(-0{,}1414\,\omega^2\rho S L\right) & \left(\frac{8EI}{L^3}\pi^2 - 0{,}7\,\omega^2\rho S L\right) & \left(-0{,}1414\,\rho S L \omega^2\right) \\ \left(-0{,}1\,\omega^2\rho S L\right) & \left(-0{,}1414\,\omega^2\rho S L\right) & \left(\frac{81 EI\pi^4}{2L^3} - 0{,}6\,\omega^2\rho S L\right) \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si $(A_1, A_2, A_3) \neq (0,0,0) \Rightarrow \det[B] = 0$

après calcul ; on trouve les pulsations et les vecteurs propres :

- $\omega_0 = 0$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_0 \Rightarrow$ Mode du corps rigide.
- $\omega_1 = \frac{8{,}991}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \Rightarrow$ le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}0159 \\ 0{,}0021 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_1$

$\omega_3 = \frac{37,13}{L^3}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \Rightarrow$ le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3,835 \\ -0,1587 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_2$

Donc les modes correspondants sont.

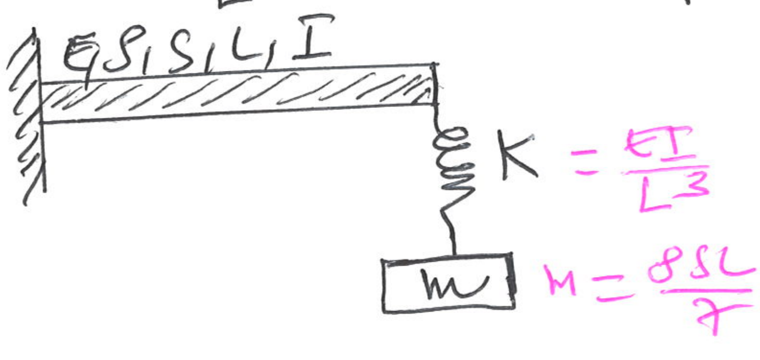
$\phi_i(X) = [N] \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_i$ $\quad (i = 0, 2)$.

$$\begin{cases} \phi_0(X) = \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi X}{L}\right) + \sin\left(\frac{3\pi X}{L}\right) \\ \phi_1(X) = \sin\frac{\pi X}{L} + 0,0189\sin\left(\frac{2\pi X}{L}\right) + 0,0021\sin\left(\frac{3\pi X}{L}\right). \\ \phi_2(X) = \sin\frac{\pi X}{L} - 3,835\sin\left(\frac{2\pi X}{L}\right) - 0,1587\sin\left(\frac{3\pi X}{L}\right). \end{cases}$$

Exercice :

le système représenté est constitué d'une poutre encastrée - libre avec un système masse - ressort suspendu à l'extrémité libre. Utiliser la méthode de Rayleigh - Ritz pour calculer les trois premières fréquences et les vecteurs propres correspondants. Utiliser $v(x,t) = \left(\frac{X}{L}\right)^2 q_1 + \left(\frac{X}{L}\right)^3 q_2$ et prendre q_3 comme déplacement de la masse (m).

De plus $K = \frac{EI}{L^3}$ et $m = \frac{\rho S L}{7}$.



✓ $E_{c_{poutre}} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{2}\rho S\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^4 \dot{q}_1^2\, dx + \frac{1}{2}\rho S\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^6 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\, \frac{x^5}{L^2}\dot{q}_1\dot{q}_2\, dx$$

$$\boxed{E_{c_{poutre}} = \frac{\rho SL}{10}\dot{q}_1^2 + \frac{\rho SL}{14}\dot{q}_2^2 + \frac{\rho SL}{6}\dot{q}_1\dot{q}_2}$$

✓ $E_{c_{masse}} = \frac{1}{2} m \dot{q}_3^2 = \boxed{\frac{\rho SL}{14}\dot{q}_3^2}$

$$\boxed{E_c = \frac{\rho SL}{10}\dot{q}_1^2 + \frac{\rho SL}{14}\dot{q}_2^2 + \frac{\rho SL}{6}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\rho SL}{14}\dot{q}_3^2}$$

✓ $E_{p_{poutre}} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}q_1 + \frac{6x}{L^3}q_2\right)^2 dx$

$$\boxed{E_{p\,poutre} = \frac{2EI}{L^3}q_1^2 + \frac{6EI}{L^3}q_1q_2 + \frac{6EI}{L^3}q_2^2}$$

✓ $E_{ressort} = \frac{1}{2}K(q_1+q_2-q_3)^2$; $\Big|\, E_{ressort} = \frac{1}{2}K\left[v(L,t) - q_3\right]^2$

$$\boxed{E_{p\,ressort} = \frac{1}{2}\frac{EI}{L^3}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2+2q_1q_2-2q_1q_3-2q_2q_3\right)}$$

L'application de l'eqt de Lagrange donne:

$$\rho SL\begin{bmatrix} 1/5 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \ddot{q}_3\end{Bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 7 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}.$$

On prend $q_i = A_i \sin\omega t$; $i = 1,3$.

après remplacement dans le système des EDMs et après calcul:

$$\omega_1 = \frac{2,143}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \;;\; \begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_2\end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix}0,5308\\-0,1841\\1\end{pmatrix}_1$$

$$\omega_2 = \frac{4,346}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \;;\; \begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}1\\-0,4077\\-0,3486\end{pmatrix}_2$$

$$\omega_3 = \frac{34,92}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \;;\; \begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix}-0,8215\\1\\-0,0010\end{pmatrix}_3$$