Univérsité de Tlemcen
Faculté des sciences
Département deMatématiques

*2éme Année Licence (S4), 2019-2020*
*Corrigé de la série d'exercices de Géométrie N°2*

*Enseignant:* **H.BENALLAL**

**Exercice 1**:
Calculer les courbures des courbes paramétrée par la longueur de l'arc suivantes:

1. $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t\right)$

On a $\alpha'(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t\right)$
Le vecteur tangent $T(t) = \alpha'(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t\right)$, la courbure est donc:

$$\begin{aligned} k(t) &= \|T(t)\| = \left\| \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t\right) \right\| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t + \sin^2 t} \end{aligned}$$

D'où $k(t) = 1$.

2. $\alpha(t) = \left(\sqrt{1+t^2}, \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)$.

On a $\alpha'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$. Le vecteur tangent $T(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ et $T'(t) = \left(\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$, d'où $k(t) = \|T'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{t^2}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{1+t^2}$

3. $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right), t \in ]-1, 1[$

On a $\alpha'(t) = \left(\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{-1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Le vecteur tangent unitaire
$T(t) = \alpha'(t) = \left(\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{-1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $T'(t) = \left(\frac{1}{4}(1+t)^{\frac{-1}{2}}, \frac{1}{4}(1-t)^{\frac{-1}{2}}, 0\right)$.
D'où $k(t) = \sqrt{\frac{1}{16}(1+t)^{-1} + \frac{1}{16}(1-t)^{-1}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1-t^2}}$

**Exercice 2:**
Calculer les éléments de Frenet $(T, k, N, B, \tau)$ des courbes suivantes:

1. $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right), t \in ]-1, 1[$.

On a, d'après l'ex1, $T(t) = \left(\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{-1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $k(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}$.
Le vecteur normal: $N(t) = \frac{T'(t)}{k(t)} = 2\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{4}(1+t)^{\frac{-1}{2}}, \frac{1}{4}(1-t)^{\frac{-1}{2}}, 0\right)$ par suite:
$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1-t)^{\frac{1}{2}}, (1+t)^{\frac{1}{2}}, 0\right)$.

Le vecteur binormal

$$\begin{array}{rcl} B(t) &=& T(t) \wedge N(t) \\ &=& \left( \left( \frac{-1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}.0 \right) - \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \left( \frac{-1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}.0 \right) + \frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+t) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t) \right) \\ &=& \left( \frac{-1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{array}$$

La torsion $\tau(t) = B'(t).N(t)$, or $B'(t) = \left( \frac{-1}{4}(1+t)^{\frac{-1}{2}}, \frac{-1}{4}(1-t)^{\frac{-1}{2}}, 0 \right)$, d'où

$\tau(t) = \frac{-1}{4\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

2. $\alpha(t) = \left( \sqrt{1+t^2}, t, \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \right)$

On a, $\alpha'(t) = \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)$ de norme $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2} \neq 1$ , donc la courbe n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc.

On pose $v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Le vecteur tangent $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)$.

Le vecteur normal $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ où $T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, \dfrac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$ donc

$\|T'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{1}{(1+t^2)^3} + \dfrac{t^2}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}$ et

$N(t) = \left( \frac{\sqrt{2}(1+t^2)}{\sqrt{2}} \right) \left( \dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, \dfrac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \left( \dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, \dfrac{-t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$.

Enfin, le vecteur binormal

$$\begin{array}{rcl} B(t) &=& T(t) \wedge N(t) \\ &=& \left( \frac{-t}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} + \frac{t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)}, \frac{-1}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &=& \left( \frac{-t}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{array}$$

Calculons, maintenant, la courbure $k$ et la torsion $\tau$:

La courbure: $k(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} = \dfrac{1}{2(1+t^2)}$.

La torsion: $\tau(t) = -\dfrac{1}{v(t)} (B'(t).N(t))$, or $B'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \dfrac{-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, \dfrac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$. Donc

$\tau(t) = -\dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \dfrac{-1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{t^2}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$, d'où $\tau(t) = \dfrac{-1}{2(1+t^2)}$.

**Exercice 3:**

On donne la courbe $\alpha$ définie par $\forall t \in \mathbb{R} : \alpha(t) = (t, f(t))$ c'est le graphe d'une fonction réelle $f$.

On a $\alpha'(t) = (1, f'(t))$ de norme $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)} \neq 1$, donc la courbe $\alpha$ n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc.

On pose $v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$. Le vecteur tangent $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + f'^2(t)}} (1, f'(t))$ de dérivée

$$T'(t) = \left( \frac{-f''(t).f'(t)}{(1 + f'^2(t))^{\frac{3}{2}}}, \frac{f''(t)}{(1 + f'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right)$$

La courbure

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(t)}}\sqrt{\frac{f''^2(t).f'^2(t)+f''^2(t)}{(1+f'^2(t))^3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(t)}}\sqrt{\frac{f''^2(t)}{(1+f'^2(t))^2}} = \frac{\left|f''^2(t)\right|}{(1+f'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

**Exercice 4**:
Soit $\alpha$ une courbe régulière paramétrée de classe $C^2$, on note par $s(t)$ une abscisse curviligne de $\alpha$ et $v(t) = s'(t) = \|\alpha'(t)\|$.

- *Montrer que* $k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$.

Comme

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}.\frac{ds}{dt} = T(s(t)).s'(t) = v(t).T(s(t))$$

Alors

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \frac{d}{dt}(v(t).T(s(t))) = v'(t).T(s(t)) + v(t).(T(s(t)))' \\ &= v'(t).T(s(t)) + v^2(t)k(s(t)).N(s(t)) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha'(t)\wedge\alpha''(t) &= (v(t).T(s(t)))\wedge\left(v'(t).T(s(t)) + v^2(t)k(s(t)).N(s(t))\right) \\ &= v(t)v'(t).(T(s(t))\wedge T(s(t))) + v^3(t)k(s(t)).(T(s(t))\wedge N(s(t))) \\ &= v^3(t)k(s(t)).B(s(t)) \quad \text{ car } T\wedge T = 0 \text{ et } T\wedge N = B \end{aligned}$$

Donc $\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\| = v^3(t)k(s(t)).\|B(s(t))\| = v^3(t)k(s(t) = \|\alpha'(t)\|^3\, k(s(t))$ car $\|B(s(t))\| = 1$.
Par conséquent

$$k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

- *Montrer que* $\tau(s(t)) = \frac{\alpha'(t).(\alpha''(t)\wedge\alpha'''(t))}{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|^2}$.

On utilise les formules de Frenet

$$\begin{cases} T'(s(t)) &= v(t)k(s(t)).N(s(t)) \\ N'(s(t)) &= -v(t)k(s(t)).T(s(t)) + v(t)\tau(s(t)).B(s(t)) \\ B'(s(t)) &= -v(t)\tau(s(t)).N(s(t)) \end{cases}$$

On a

$$\alpha'(t) = v(t).T(s(t)) \ , \ \alpha''(t) = v'(t).T(s(t)) + v^2(t)k(s(t)).N(s(t))$$

Et

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= v''(t).T(s(t)) + v'(t)v(t)k(s(t)).N(s(t)) + 2v'(t)v(t)k(s(t)).N(s(t)) \\ &\quad + v^2(t)(k(s(t)))'.N(s(t)) + v^2(t)k(s(t)).N'(s(t)) \\ &= v''(t).T(s(t)) + 3v'(t)v(t)k(s(t)).N(s(t)) + v^2(t)(k(s(t)))'.N(s(t)) \\ &\quad - v^3(t)k^2(s(t)).T(s(t)) + v^3(t)\tau(s(t))k(s(t)).B(s(t)) \\ &= (v''(t) - v^3(t)k^2(s(t))).T(s(t)) + (3v'(t)v(t)k(s(t)) + v^2(t)(k(s(t)))').N(s(t)) \\ &\quad + v^3(t)\tau(s(t))k(s(t)).B(s(t)) \end{aligned}$$

On a déjà montrer que $\alpha'(t)\wedge\alpha''(t) = v^3(t)k(s(t)).B(s(t))$. D'où $\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|^2 = v^6(t)(k(s(t)))^2$.

D'autre part

$$\begin{aligned}\alpha''(t)\wedge\alpha'''(t) &= v'(t)(3v'(t)v(t)k(s(t))+v^2(t)(k(s(t)))').B(s(t))-v'(t)v^3(t)\tau(s(t))k(s(t)).N(s(t))\\ &\quad -v^2(t)k(s(t))(v''(t)-v^3(t)k^2(s(t))).B(s(t))+v^5(t)k^2(s(t))\tau(s(t)).T(s(t))\\ &= v^5(t)k^2(s(t))\tau(s(t)).T(s(t))-v'(t)v^3(t)\tau(s(t))k(s(t)).N(s(t))\\ &\quad +\left(3v'^2(t)v(t)k(s(t))+v'(t)v^2(t)(k(s(t)))'-v^2(t)k(s(t))v''(t)-v^5(t)k^3(s(t))\right).B(s(t))\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\alpha'(t).(\alpha''(t)\wedge\alpha'''(t)) &= v^6(t)k^2s(t))\tau(s(t))\,\|T(s(t))\|\\ &= v^6(t)k^2(s(t))\tau(s(t))\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\alpha'(t).(\alpha''(t)\wedge\alpha'''(t))}{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|^2}=\frac{v^6(t)k^2(s(t))\tau(s(t))}{v^6(t)(k(s(t)))^2}=\tau(s(t))$$

**Exercice 5:**

Considérons la courbe $\beta : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par: $\beta(t)=\left(\int_0^t\sqrt{1-e^{-2u}}du, e^{-t}\right)$.

**1**. *La courbe $\beta$ est-elle paramétrée par longueur d'arc ?*
On a: $\beta'(t)=\left(\sqrt{1-e^{-2t}},-e^{-t}\right)$ de norme: $\left\|\beta'(t)\right\|=1$.
$\beta$ est bien paramétrisée par longueur d'arc.
**2.** *Calculons la distance entre* $p=\beta(t)$ et $q=C_p\cap(ox)$.

- Déterminons une équation paramétrique de la droite $C_p$:

La droite $C_p$ est dirigée par $\beta'(t)$, c'est l'ensemble des point $m(t)=(x(t),y(t))$ de $\mathbb{R}^2$ tels que le vecteur $\overrightarrow{\beta(t)m(t)}$ soit colinéaire à $\beta'(t)$. i.e, il existe une fonction $\lambda(t)\in\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\beta(t)m(t)}=\lambda(t)\beta'(t)$.

Ce qui donne $\begin{cases} x(t)-\int_0^t\sqrt{1-e^{-2u}}du=\lambda(t)\sqrt{1-e^{-2t}} \\ y(t)-e^{-t}=-\lambda(t)e^{-t}\end{cases}$ , et par suite la représentation paramétrique de $C_p$ est donnée par $\left(\int_0^t\sqrt{1-e^{-2u}}du+\lambda(t)\sqrt{1-e^{-2t}},(1-\lambda(t))\,e^{-t}\right)$

- Soit $q$ l'intersection de la droite $C_p$ avec l'axe $(ox)$ c'est-à-dire $(1-\lambda(t))\,e^{-t}=0$ et donc $\lambda(t)=1$ $\forall t\in\,]0,+\infty[$.

Par suite $q=\left(\sqrt{1-e^{-2t}}+\int_0^t\sqrt{1-e^{-2u}}du,0\right)$

- La distance entre $p$ et $q$ est le réel $pq=\|\overrightarrow{pq}\|$, or $\overrightarrow{pq}=\left(\sqrt{1-e^{-2t}},-e^{-t}\right)$ de norme

$$\|\overrightarrow{pq}\|=\sqrt{1-e^{-2t}+e^{-2t}}=1=pq$$

**3.** *Calculons la courbure de $\beta$*:

$k(t)=\|T'(t)\|$, et comme $T(t)=\beta'(t)=\left(\sqrt{1-e^{-2t}},-e^{-t}\right)$, alors $T'(t)=\left(\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}},e^{-t}\right)$ d'où $k(t)=\|T'(t)\|=\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$.

**Exercice 6:**

soit $\gamma(t)=\left(\int_0^t\frac{(1+ch^2u)\cos u}{ch^2u}du,\int_0^t\frac{(1+ch^2u)\sin u}{ch^2u}du,\int_0^t\frac{(1+ch^2u)\,shu}{ch^2u}du\right)$

le vecteur vitesse de la courbe $\gamma$ est: $\gamma'(t)=\frac{(1+ch^2t)}{ch^2t}(\cos t,\sin t,sht)$ de norme:
$\|\gamma'(t)\|=\frac{(1+ch^2t)}{cht}$.

**1.** *Déterminer le repère de Frenet:*

- Posons $v(t)=\dfrac{\left(1+ch^2t\right)}{cht}$. Le vecteur tangent $T(t)=\dfrac{\gamma'(t)}{v(t)}=\dfrac{1}{cht}\left(\cos t,\sin t, sht\right)$

- Le vecteur normal: $N(t)=\dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ où $T'(t)=\dfrac{1}{ch^2t}\left(-\sin tcht-sht\cos t,\cos tcht-\sin tsht,1\right)$ de norme $\|T'(t)\|=\dfrac{\sqrt{2}}{cht}$, d'où

$N(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}cht}\left(-\sin tcht-sht\cos t,\cos tcht-\sin tsht,1\right)$

- Le vecteur binormal est: $B(t)=T(t)\wedge N(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}cht}\left(\sin tcht-sht\cos t,-cht\cos t-sht\sin t,1\right)$.

**2**. *Calculer la courbure $\kappa$ et la torsion $\tau$ :*

- La courbure: $\kappa(t)=\dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)}=\dfrac{cht}{(1+ch^2t)}.\dfrac{\sqrt{2}}{cht}$. Enfin $\kappa(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{1+ch^2t}$.

- La torsion:$\tau(t)=-\dfrac{1}{v(t)}\left\langle B'(t),N(t)\right\rangle$, or $B'(t)=\dfrac{sht}{\sqrt{2}ch^2t}\left(cht\sin t+sht\cos t, sht\sin t-cht\cos t,-1\right)$

donc $\tau(t)=-\dfrac{cht}{(1+ch^2t)}\left(\dfrac{sht}{2ch^3t}(-2ch^2t)\right)$ d'où $\tau(t)=\dfrac{sht}{1+ch^2t}$.

**3.** *Verifier que la fonction $\dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2}$ est constante:*

$\dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2}=\dfrac{\sqrt{2}\left(1+ch^2t\right)}{(sh^2t+2)}=\dfrac{\sqrt{2}\left(1+ch^2t\right)}{(1+ch^2t)}$ , ainsi $\dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2}=\sqrt{2}$

**Exercice 7:**

Soit $\alpha(t)$ une représentation paramétrique en fonction de l'abscisse curviligne de la courbe dont la courbure et la torsion sont constantes. $\alpha(t)$ s'obtient comme solution du système différentiel résultant des formules de Frenet:

$$\left\{\begin{array}{rcl} T'(t) & = & k_0.N(t) \\ N'(t) & = & -k_0.T(t)+\tau_0.B(t) \\ B'(t) & = & -\tau_0.N(t) \end{array}\right. \quad \text{où } T(t)=\alpha'(t) \text{ et } B=T\wedge N$$

- *Si $k_0=0$ :* Alors $\alpha''(t)=T'(t)=0$, d'où

$$\alpha(t)=at+b \ \text{ où } a \text{ et } b \text{ des vecteurs constants}$$

La courbe est donc une droite.

- *Supposons maintenant que $k_0\neq 0$.* Il vient

$$\begin{array}{rcl} N''(t) & = & -k_0.T'(t)+\tau_0.B'(t) \\ & = & -k_0^2.N(t)-\tau_0^2.N(t)=-(k_0^2+\tau_0^2).N(t) \end{array}$$

Ou

$$N''(t)+(k_0^2+\tau_0^2).N(t)=0$$

c'est une équation diffeéntielle du seconde ordre avec équation caractéristique $r^2+(k_0^2+\tau_0^2)=0$, où la solution générale est donnée par

$$N(t)=a\cos\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)+b\sin\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right) \quad \text{avec des vecteurs constants } a \text{ et } b$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \alpha''(t) & = & T'(t)=k_0N(t) \\ & = & k_0a\cos\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)+k_0b\sin\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right) \end{array}$$

Par intégration, il vient

$$\alpha'(t) = T(t) = \frac{k_0}{\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}} a \sin\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right) t\right) - \frac{k_0}{\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}} b \cos\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right) t\right) + c$$

Et

$$\alpha(t) = \frac{-k_0}{(k_0^2+\tau_0^2)} a \cos\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right) t\right) - \frac{k_0}{(k_0^2+\tau_0^2)} b \sin\left(\left(\sqrt{(k_0^2+\tau_0^2)}\right) t\right) + ct + d$$

Où $a, b, c, d$ sont des vecteurs constants.

Les vecteurs $a, b, c$ ne sont pas arbitraires: on a $N.N = 1$ et $T.N = 0$ impliquent $a.a = b.b = 1$ et $a.b = a.c = b.c = 0$. Les vecteurs $a, b$ et $\frac{c}{||c||}$ sont donc orthonormaux.

Finalement $\alpha(t)$ représente une hélice circulaire de rayon $\frac{k_0}{(k_0^2+\tau_0^2)}$.