Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
2$^{\text{ème}}$ année licence (S4)

A.U 2019-2020

Série d'exercices de Géométrie N°2

Exercice 1 :

Calculer les courbures des courbes paramétrées par la longueur de l'arc suivantes :

1. $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,, \sin t)$
2. $\alpha(t) = \left(\sqrt{1+t^2}, \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)$
3. $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t}\right),\ \ t \in \left]-1,1\right[$

.

Exercice 2 :

Calculer les éléments de Fresnet $(T, k, N, B\ et\ \tau)$ des courbes suivantes :

1. $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t}\right),\ \ t \in \left]-1,1\right[$
2. $\alpha(t) = \left(\sqrt{1+t^2}, t, \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)$

Exercice 3 :

Montrer que la courbure de la courbe plane $y = f(x)$ est donnée par

$$k = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 4 :

Prouver les formules générales qui permettent de calculer la courbure et la torsion lorsque la courbe n'est pas paramétrée par longueur d'arc :

$$k\big(s(t)\big) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3},$$
$$\tau(s(t)) = \frac{\alpha'(t).\big(\alpha''(t) \wedge \alpha'''(t)\big)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

Exercice 5 :

On considère la courbe paramétrée $\beta:]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\beta(t) = \left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du, e^{-t}\right)$$

1. La courbe β est-elle paramétrée par longueur d'arc ?
2. Soit C_p la droite tangente à la courbe β au point $p = \beta(t)$, on note q l'intersection de C_p avec l'axe (ox). Prouver que, pour tout $t > 0$, la distance entre p et q vaut un.
3. Calculer la courbure de β en chaque point.

Exercice 6 :

Soit γ la courbe paramétrée définie par

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \frac{(1 + ch^2u)\cos u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u)\sin u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u)shu}{ch^2u} du \right)$$

1. Déterminer, en un point de γ, le repère de Frenet.
2. Calculer la courbure k et la torsion τ en un point $\gamma(t)$.
3. Vérifier que la fonction $\frac{k}{\tau^2+k^2}$ est constante.

Exercice 7 :

Montrer que si $k = k_0$ et $\tau = \tau_0$ sont deux constantes non nulles alors la courbe est l'hélice circulaire.