Analyse Combinatoire

التحليل التوافقي :

التحليل التوافقي هو فرع من الرياضيات ، يساعد في عد و حصر الاشياء , العناصر المكونة ~~لمجموعة~~ لمجتمع ما (مجموعة ما) وبالتالي فهو يساعد في عد وحصر الحالات الممكنة للتجربة العشوائية في حال تعذر ايجادها عن طريق العد المباشر .

تذكير :

نسمي عاملي n factorielle n ونرمز له بالرمز $n!$ حاصل ضرب n .

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2.1 = 2$

مثال : أحسب : $4!$ ، $5!$ ، $6!$ ، $3!$.

① الترتيبات Arrangements

إذا كان لدينا المجموعة الكلية E مكونة من n عنصر ونريد تشكيل مجموعات جزئية من x عنصر ، بحيث $x \leq n$. نسمي ترتيبة كل مجموعة جزئية مكونة من x عنصر مأخوذة من بين n عنصر . سواءً باختلاف ترتيب عناصرها أو باختلاف طبيعة عناصرها .
ونرمز لها بالرمز A_n^x

- في حالة الترتيبات بدون تكرار ، (إرجاع ، إعادة)

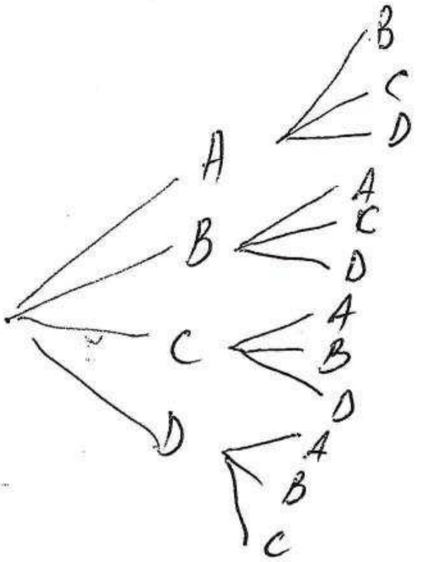
في حالة ملاحظة كل عنصر مرة واحدة في الترتيبة ، دون تكرار من x عنصر المأخوذة من n فإن عدد الترتيبات تحسب كالتالي

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \quad , \quad 1 \leq x \leq n$$

مثال : لنفرض انه لدينا مجموعة مكونة من 4 عناصر.

$\Omega = \{A, B, C, D\}$ $\quad$ $card\ \Omega = 4$

نريد تكوين مجموعات جزئية مكونة من عنصرين (2)
ماهو عدد الحالات الممكنة.



$\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,A\}, \{B,C\}, \{B,D\}$
$\{C,A\}, \{C,B\}, \{C,D\}, \{D,A\}, \{D,B\}, \{D,C\}$

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} =$$

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$$

$$\boxed{A_4^2 = 12}$$

لدينا 12 حالة ممكنة لترتيب هذه العناصر.

* **حالة الترتيبات مع التكرار:**

في حالة ملاحظة كل عنصر عدة مرات (أي تكرره عدة مرات) في الترتيبة فإن عدد الترتيبات بالتكرار من x عنصر المأخوذة من n تحسب كالتالي:

$$A_n^x = n^x \quad , \quad 1 \leqslant x \leqslant n$$

مثال : نفس المثال السابق مع تكرار العناصر.

$\{A,A\}, \{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,B\}, \{B,A\}, \{B,C\}, \{B,D\}$
$\{C,C\}, \{C,A\}, \{C,B\}, \{C,D\}, \{D,D\}, \{D,A\}, \{D,B\}, \{D,C\}$

$$A_4^2 = 4^2 = 16$$

مثال : لدينا إناء فيه 8 كرات . اوجد عدد العينات المكونة من 3 كرات : في حالة السحب : أ- بالارجاع ب- بدون إرجاع

الحل : * عدد العينات في حالة السحب بالإرجاع (بالاعادة)

$$A_n^x = n^x$$

$$A_8^3 = 8^3 = 8.8.8 = 512$$

* عدد العينات في حالة السحب بدون إرجاع

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}}$$

$$\boxed{A_8^3 = 336}$$

② التبديلات : Permutations

اذا كان لدينا المجموعة الكلية E مكونة من n عنصر فإن التبديلات هي كل المجموعات الممكن تشكيلها من عناصر n نفسها وتختلف عن بعضها البعض باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل. ونرمز لها بالرمز P_n

* **التبديلات بدون تكرار**

عدد التبديلات المكونة لـ n عنصر تحسب بالطريقة

$$P_n = n!$$

ملاحظة : التبديلة بدون تكرار هي حالة خاصة من الترتيبات في حالة $n = x$ بمعنى

$$A_n^x = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

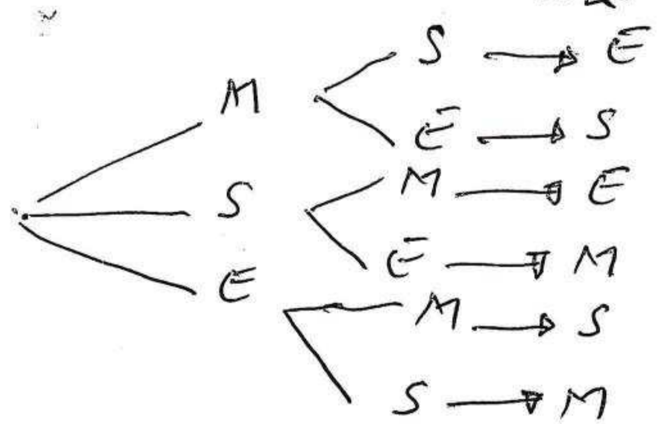
وبالتالي $A_n^n = P_n = n!$

مثال: لدينا 8 اشخاص نريد اجلاسهم حول مائدة. ماهو عدد الحالات الممكنة

الحل

$$P_n = n! \quad . \quad P_8 = 8! = 40320$$

مثال: لدينا 3 كتب: الاقتصاد (E)، الرياضيات (M)، الاحصا(S)
نريد ترتيبهم في رف مكتبة.
ماهو عدد الحالات الممكنة.



MSE ①
MES ②
SME ③
SEM ④
EMS ⑤
ESM ⑥

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

لو اضفنا كتاب آخر نفس الشي

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

مثال: قطار يتكون من 10 عربات (مقطورات) (WAGONS) مختلفة
فبكم طريقة يمكن ترتيب هذا القطار. (بفرض أن القاطرة COMOTIVES ~~موجودة دوما في المقدمة~~)
هنا نحن بصدد تبديل 10 عناصر (عربات) أي

$$P_n = P_{10} = 10! = 3628800$$

التبديلات بالتكرار

في حالة وجود عدة تكرارات K لنفس العنصر مثلا بين n عنصر.
اذا تكرر نفس العنصر K مرة مثلا بين العناصر n. في هذه الحالة
التبديلات تحسب كالتالي

~~$P_n = \frac{n!}{K!}$~~

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots n_k!}$$

بحيث $n_1, n_2, n_3 \ldots n_k$ هي العناصر المتكررة.

مثال: لدينا الاسم ماسينيسا MASSINISSA ونبحث
عن عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من هذا الاسم
بالعربية واللاتينية (سواء كان لها معنى او بدون معنى).

الحل: ~~عدد الكلمات الممكنة~~

- باللغة العربية هذا الاسم يمكننا من تكوين

$$P_n^{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_k!}$$

$$P_8^{2.2.2} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5040$$

5040 كلمة مختلفة

- باللغة الفرنسية فان هذا الاسم يمكننا من تكوين

$$P_{10}^{2.4.2} = \frac{10!}{2!\,4!\,2!} = 37800$$

37800 كلمة مختلفة.

③ التوفيقات : les combinaisons

التوفيقة هي كل مجموعة يمكن اختيارها من مجموعة من الأشياء أو العناصر بأخذها كلها أو بعضا منها **دون مراعاة الترتيب**.

إذا كان لدينا مجموعة E مكونة من n عنصر ~~[فإن عدد التوفيقات التي يمكن تكوينها بحيث تحوي كل توفيقة على x عنصر يرمز لها بالرمز C_n^x أو $\binom{n}{x}$]~~ نسمي توفيقة ذات x عنصر من المجموعة E كل جزء من E يشمل x عنصر من E ونرمز لعدد التوفيقات بـ C_n^x أو $\binom{n}{x}$

$$\text{combinaisons} = \frac{\text{Arrangement}}{\text{Permutation}}$$

← التوفيقات دون الإرجاع : combinaisons sans remise

يعطى عدد التوفيقات المكونة من x عنصر المأخوذة من n عنصر دون الإرجاع بالعبارة التالية:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

حيث $1 \leq x \leq n$

مثال: يتكون قسم دراسي من 40 تلميذ (طالب)، أرادوا اختيار 03 ممثلين للقسم. بكم طريقة يتم اختيارهم؟

الحل: اختيار 03 ممثلين هو اختيار جزء مكون 03 عناصر من 40 عنصر وعليه عدد الطرق هو: C_{40}^3

$$C_{40}^3 = \frac{40!}{3!(40-3)!} = \frac{40.39.38.\cancel{37!}}{3.2.1.\cancel{37!}} = \frac{\cancel{40}.\cancel{39}.38}{\cancel{3}.\cancel{2}}$$

$$C_{40}^3 = 20.13.38$$

$$\boxed{C_{40}^3 = 9880}$$

إذا هناك 9880 طريقة لاختيار 03 ممثلين لهذا القسم.

خواص C_n^x

$$C_n^x = C_n^{n-x} \quad ; \quad C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^1 = n \quad ; \quad C_n^0 = 1$$

$$C_n^x = C_{n-1}^{x-1} + C_{n-1}^x \qquad 0 \leq p \leq n-1 \text{ إذا كان}$$

• دستور ثنائي الحد : a و b عددان طبيعيان و n عدد طبيعي غير معدوم فإن

$$(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^{n-n} b^n$$

إذاً بصيغة عامة

دستور ثنائي الحد. (أو ثنائية نيوتن)

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{x=0}^{x=n} C_n^x a^{n-x} b^x}$$

← **التوفيقات مع الإرجاع** Combinaisons avec remise

عدد التوفيقات المكونة من n من x عنصر مع الإرجاع يحسب بالشكل التالي :

$$C_{n+x-1}^x = \frac{(n+x-1)!}{x!(n-1)!}$$

تمرين : يحتوي كيس على 6 قريصات مرقمة من 1 إلى 6 نسحب من الكيس قريصتين (02) في آن واحد دون إرجاع.

- احسب ~~عدد~~ إحتمال سحب قريصتين مجموعهما 7
- فرقهما 3 علماً أن ~~[illegible]~~ مجموعها يساوي 7

الحل : عدد إمكانيات سحب قريصتين في آن واحد من الكيس هو عدد التوفيقات ذات عنصرين من مجموعة ذات 6 عناصر

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

* لتكن A الحادث المعرف بمجموع الرقمين يساوي 7

$$A = \{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}$$

عدد الحالات الموافقة لـ A هو 3.

ومنه:

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{3}$$

* لتكن B الحادث المعرف بالفرق بين الرقمين يساوي 3

$$B = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$$

$$A \cap B = \{\{2,5\}\}$$

إحتمال الحصول على B علماً أن A تحقق

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

لدينا، $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$

وعليه

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{5}$$

__تمرين 8__ صندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و5 كرات خضراء و3 كرات بيضاء تتمثل التجربة في سحب كرتين من الصندوق في آن واحد.

ماهو إحتمال الحوادث التالية:

A: كرتين لونهما أبيض

B: " " من لونين مختلفين

C: كرتين لهما نفس اللون.

الحل   الحالات الممكنة

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$$

- حساب الاحتمال A

$$Card(A) = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

$$P(A) = 3/66 = 1/22 = 0{,}045$$

- حساب الاحتمال B

$$Card(B) = C_4^1 C_5^1 + C_4^1 C_3^1 + C_5^1 C_3^1$$

$$= 4 . 5 + 4 . 3 + 5 . 3$$

$$= 47$$

$$P(B) = 47/66 = 0{,}71$$

- حساب إحتمال C

$$Card(C) = C_4^2 + C_5^2 + C_3^2$$

$$= 06 + 10 + 3$$

$$= 19$$

$$P(C) = 19/66 = 0{,}28$$

تمرين 8 لدينا 20 رياضيا متربصا، منهم

07 في الساحة ، 08 في الرماية ، 05 في الغوص.

نريد تكوين مجموعة من 03 رياضيين.

المطلوب: حساب الاحتمالات التالية

A: أن يكون 3 متربصين من اختصاصات مختلفة.

B: " " 3 " من نفس الاختصاص.

C: أن يكون واحد على الأقل من الثلاثة ممارس الغوص.

~~احسب احتمال متتمة C~~ . ~~أحسب الحادث العكسي لـ C~~

الحل: الحالات الكلية أو الحالات الممكنة

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20\times 19\times 18\times \cancel{17!}}{\cancel{17!}\cdot 3\cdot 2} = 1140$$

- حساب احتمال الحادث A

$$card(A) = C_7^1 \cdot C_8^1 \cdot C_5^1 = 7.8.5 = 280$$

$$P(A) = \frac{280}{1140} = 0,24$$

- حساب احتمال الحادث B

$$card(B) = C_7^3 + C_8^3 + C_5^3 = 101$$

$$P(B) = \frac{101}{1140} = 0,08$$

- حساب احتمال الحادث C

$$card(C) = C_7^1 C_8^1 C_5^1 + C_7^1 C_5^2 C_8^0 + C_7^0 C_8^1 C_5^2 + C_7^0 C_8^0 C_5^3 = 440$$

$$P(C) = \frac{440}{1140} = 0,38$$