(I) Préliminaire

soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé.

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $I = \{(x_1, \dots, x_n) : -\infty < x_i \leq a_i ; i = 1 \dots n\}$

I-1 Definition :

On dit que $X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega \longmapsto X(\omega) \end{array}$ est une variable aléatoire de dimension n ou vecteur aléatoire de dimension n si pour

$I \subset \mathbb{R}^n$: $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$.

I.2 Proposition :

soit $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a ; $i = 1, \dots, n$

Alors $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire.

Preuve : $X^{-1}(I) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq a_i)\right) \in \mathcal{A}$

Pour toute la suite du chapitre on considère $n = 2$ et

$X = (X_1, X_2) : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \longmapsto X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{array}$

X est un couple de V.a.r

(II) Couple de V.a.r discretes.

On considere un couple de v.a.d (X, Y) :

$(X, Y) : \begin{array}{l} (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$

Scanned by CamScanner

On suppose que $X(\Omega)=\{x_i, i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j, j\in J\}$
avec $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ au plus dénombrables.

on note $p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$, $i\in I$ et $j\in J$

Notation $(X=x_i)\cap(Y=y_j) := (X=x_i, Y=y_j)$

II.1 Definition : $\{p_{ij} : i\in I \text{ et } j\in J\}$ s'appelle loi conjointe (ou loi jointe) du couple (X,Y).

Remarque : $\forall i,j \quad 0\leq p_{ij} < 1$ et $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} = 1$.

II.2 Lois marginales

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires.
X et Y sont dites variables marginales

II.2.1 proposition-definition

•) $\forall i\in I$: $P(X=x_i) = \sum_{j\in J} p_{ij} := p_{i\cdot}$

$\{(x_i, p_{i\cdot}) ; i\in I\}$ est la loi marginale de X

••) $\forall j\in J$ $P(Y=y_j) = \sum_{i\in I} p_{ij} = p_{\cdot j}$

$\{(y_j, p_{\cdot j}) ; j\in J\}$ est la loi marginale de Y

Remarque : la connaissance des lois marginales de X et Y ne suffit pas à déterminer la loi du couple (X,Y)

Scanned by CamScanner

Exemple : On lance un dé. On note X la V.a égale au nombre obtenu et Y la V.a. égale à 0 si le nombre obtenu est impair et égale à 1 sinon.
la loi du couple $P_{X,Y}$ est donneé par le tableau

Y \ X	1	2	3	4	5	6
0	1/6	0	1/6	0	1/6	0
1	0	1/6	0	1/6		1/6

loi, P_X, marginale de X

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_X\{x_i\}$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

loi P_X, marginale de Y

y_j	0	1
$P_Y(\{y_j\})$	1/2	1/2

Pour toute la suite on suppose que
1) $\sum x_i^2 P(X=x_i) < +\infty$ et 2) $\sum y_j P(Y=y_j) < +\infty$

Definition : la quantité, notée $cov(X,Y)$, et définie par $cov(X,Y) := E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$
s'appelle covariance de $\cancel{X}$ et Y

Proposition : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$
$= \sum x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) - E(X)E(Y)$

Scanned by CamScanner

Remarques:

1) si $X=Y$, alors $cov(X,Y) = Var(X)$.

2) la matrice $\begin{pmatrix} Var(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & Var\,Y \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice de covariance de X et Y.

Proposition : $|cov(X,Y)| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$

Preuve : soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $X - E(X) = X'$ et $Y' = Y - E(Y)$

$$0 \leq Var(Y' - \lambda X') = E(Y' - \lambda X')^2 \quad (\text{car } E(X') = E(Y') = 0)$$

$$\leq Var(Y') - 2\lambda\, cov(X'Y') + \lambda^2 Var(X')$$

$$0 \leq Var(Y') \ldots$$

Ainsi $\Delta'_\lambda = cov^2(X',Y') - Var(X')\,Var(Y') \leq 0$

d'où $cov^2(X',Y') \leq Var(X') \cdot Var(Y')$

$$\Longrightarrow \quad |cov(X',Y')| \leq \sigma_{X'} \cdot \sigma_{Y'}$$

or $Var(X') = E(X'^2) = E(X - E(X))^2 = Var(X)$

de même $Var(Y') = Var(Y)$

et $cov(X',Y') = E(X' - E(X'))(Y' - E(Y'))$

$$= E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

$$= cov(X,Y).$$

Scanned by CamScanner

Définition

la quantité $\rho_{X,Y} := \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ s'appelle coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

Proposition : $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

Preuve : on a $|cov(X,Y)| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$

Proposition : $\forall a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$
si $Y = aX+b$, alors $|\rho_{X,Y}| = 1$

Preuve:

$$cov(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$$
$$= E\big((X-E(X))\,a(X-E(X))\big)$$
$$cov(X,Y) = a\ Var(X)$$
$$Var(Y) = a^2\, Var(X)$$

Ainsi $|\rho_{X,Y}| = \dfrac{|cov(X,Y)|}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{|a|\ Var(X)}{|a| \cdot Var(X)} = 1$

On remarque

1) si $a > 0$: $\rho_{X,Y} = 1$

2) si $a < 0$ $\rho_{X,Y} = -1$

Ce qui justifie l'appellation coefficient linéaire

d'où la proposition suivante

Scanned by CamScanner

⑥

Proposition

si $|\rho_{X,Y}| = 1$, alors $Y - E(Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}(X - E(X))$.

Preuve

Posons $X' = (X - E(X))$ et $Y' = (Y - E(Y))$

$Cov(X'Y') = cov(X,Y)$ et $Var(X') = Var(X)$; $Var(Y') = Var(Y)$.

cherchons λ_0 telque $Var(Y' - \lambda_0 X') = 0$ (ce qui veut dire aussi $Y' - \lambda_0 X' = C^{te}$

or
$$0 \leq Var(Y' - \lambda_0 X') = E(Y' - \lambda_0 X)^2 \text{ (car } E(Y') = 0 \text{ et } E(X') = 0).$$

d'où
$$0 \leq Var(Y') + \lambda_0^2 Var(X') - 2\lambda_0 cov(X'; Y')$$

$$\Rightarrow \Delta_\lambda = cov^2(X'; Y') - Var(X').Var(Y') = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{cov(X'; Y')}{Var(X')}$$

Ainsi $Y' - \lambda_0 X' = C^{te} \Rightarrow E(Y) - \lambda_0 E(X) = C^{te}$

$$\Rightarrow Y - E(Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X^2}(X - E(X))$$

de même $X - E(X) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_Y^2}(Y - E(Y))$

Scanned by CamScanner

Remarque et Commentaire

a) suppose $E(X^2) < +\infty$.
cherchons $a \in \mathbb{R}$ telle que la quantité $E(X-a)^2$ est minimale

Resultat : $\min_{a \in \mathbb{R}} E(X-a)^2 = Var(X) = E(X-E(X))^2$.

<u>Preuve</u> : Posons $m = E(X)$

$E(X-a)^2 = E((X-m+m-a))^2$

$E(X-a)^2 = E(X-E(X))^2 + 2(m-a)E(X-E(X)) + (m-a)^2$

or $E(X-E(X)) = 0$ et par suite

$E(X-a)^2 = E(X-E(X))^2 + (E(X)-a)^2$

Ainsi $\min_{a \in \mathbb{R}} E(X-a)^2 = E(X-E(X))^2 = Var(X)$.

b) supposons qu'on observe des realisation de la V.a. X, mais pas celle de Y : pour chaque valeur x de X, on voudrait deviner la valeur y de Y.
Une idee simple est d'approcher Y par une fonction affine de X, c'est à dire chercher $Y = aX+b$ la plus proche possible, en moyenne, de Y.

$\min_{a,b} E(Y-(aX+b))^2 = \min_{a,b} \phi(a,b)$.

Ce minimum est atteint pour $a = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X^2}$ et $b = E(Y) - \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X^2} E(X)$

Scanned by CamScanner

Preuve :

$$\phi(a,b) = E(Y-(aX+b))^2$$

$$= Var(Y) + a^2 Var(X) - 2a\, cov(X,Y) + (E(Y) - (aE(X)+b))^2$$

$$= \underbrace{\left[a\sigma_X - \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X}\right]^2}_{\geq 0} + \underbrace{Var(Y)(1-\rho^2)}_{\geq 0} + \underbrace{\left[E(Y) - (aE(X)+b)\right]^2}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow$ pour

$$a_0 = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \quad \text{et} \quad b_0 = E(Y) - a_0 E(X)$$

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}} \phi(a,b) = \phi(a_0, b_0).$$

II.3 Variables aléatoires indépendantes

Soit X une V.a à valeurs dans $\{x_i : i\in I\}$ et Y à valeurs $\{y_j, j\in J\}$

Definition les V.a discrètes X et Y sont dites indépendantes si et seulement si $\forall i\in I$ et $\forall j\in J$ $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j)$

Proposition : si X et Y sont deux V.a indépendantes, alors $Cov(X,Y)=0$; la réciproque est fausse.

Preuve :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

$$= \sum x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) - \sum x_i P(X=x_i) \sum y_j P(Y=y_j)$$

$$= \sum x_i P(X=x_i) \sum y_j P(Y=y_j) - \sum x_i P(X=x_i) \sum y_j P(Y=y_j)$$

Scanned by CamScanner

La réciproque n'est pas vraie, en effet :
soit X la v.a de loi P_X donnée par

x_i	-2	-1	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=0$

(autrement dit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{-2,-1,1,2\}}$

On pose $Y=X^2$
Calculons la loi du couple (X,Y) : $P_{X,Y}$ est donnée par

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$

$E(XY)=0$

P_Y est donnée par

y_j	1	4
$P_Y\{y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(Y)=\frac{5}{2}$

Ainsi $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)=0$

$P(X=-2, Y=1)=0 \neq P(X=-2).P(Y=1)=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

X et Y ne sont pas indépendantes.

<u>Remarque</u> : soit X et Y 2 v.a. indépendantes.
Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
(on suppose que les domaines de définition de f et g contiennent respectivement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Scanned by CamScanner

II.4 Lois conditionnelles – Espérance conditionnelle –

Définition 1 : soit (X, Y) un couple de V.a discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. on suppose $P(Y=y) \neq 0$.
On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$, l'application définie par notée $P_X(\cdot / Y=y)$,

$$\mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P_X(A / Y=y) = \frac{P(X \in A, Y=y)}{P(Y=y)}$$

Définition 2 :
On appelle V.a. conditionnelle X sachant $(Y=y)$, notée $X/(Y=y)$, la variable aléatoire qui prend les valeurs x_i, $i \in I$ avec les probabilités

$$P(X=x_i / Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$$

Proposition
Si X et Y sont indépendantes, alors la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ est P_X.

Preuve :

$$\forall i \in I \quad P(X=x_i / Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{P(X=x_i) P(Y=y_j)}{P(X=x_i)}$$

Scanned by CamScanner

Exemple 1

Soient X et Y 2 v.a indépendantes telles que :

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ ($\lambda > 0$ et $\mu > 0$)

$\left(P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ et } P(Y=l) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^l}{l!} \right).$

1) Calculons la loi de S.

S est une v.a discrète $S(\Omega) = \mathbb{N}$

$$(S=s) = (X+Y=s) = \bigcup_{k=0}^{s} (X=k, Y=s-k)$$

$$\Rightarrow P(S=s) = \sum_{k=0}^{s} P(X=k) \cdot P(Y=s-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{s} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu}\mu^{s-k}}{(s-k)!} = \frac{1}{s!} e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{s} C_s^k \lambda^k \mu^{s-k}$$

$$P(S=s) = \frac{1}{s!} e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^s$$

On remarque $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

2) Calculons pour tout $s \in \mathbb{N}$, la loi de X sachant $(S=s)$.

$s \in \mathbb{N}$

$$P(X=k / S=s) = \frac{P(X=k, S=s)}{P(S=s)} = \frac{P(X=k, Y=s-k)}{P(S=s)}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \dfrac{e^{-\mu}\mu^{s-k}}{(s-k)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^s}{s!}} = C_s^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{s-k}$$

Scanned by CamScanner

Ainsi : la loi de X sachant $(S=1)$ est

$$b\left(1, \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right).$$

Exemple 2 :

Soient X et Y 2 v.a indépendantes, suivant la même loi $B(p)$ où $0<p<1$ $\left(\begin{array}{l} P(X=0)=P(Y=0)=1-p \\ P(X=1)=P(Y=1)=p \end{array}\right)$

1) Calculer la loi du couple (X,Y)

$P_{X,Y}$ est donnée par

$X \backslash Y$	0	1
0	q^2	pq
1	pq	p^2

$q=1-p$

2) On pose $U=X-Y$ et $V=X+Y$

Calculons la loi du couple (U,V)

$$\begin{cases} U = X - Y \\ V = X+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}(U+V) \\ Y = \frac{1}{2}(U-V) \end{cases}$$

Or $U(\Omega)=\{-1,0,1\}$ et $V(\Omega)=\{0,1,2\}$

$U \backslash V$	0	1	2
-1	0	pq	0
0	q^2	0	p^2
1	0	pq	0

P_V

v_i	0	1	2
$P_V\{v_i\}$	q^2	$2pq$	p^2

P_U

u_i	-1	0	1
$P_U\{u_i\}$	pq	p^2+q^2	pq

Scanned by CamScanner

Espérance conditionnelle

Def: On appelle espérance conditionnelle de X sachant $(Y=y_j)$ la quantité $E(X/Y=y_j) = \sum x_i P(X=x_i/Y=y_j)$

Théorème de l'espérance conditionnelle

$$E(X) = \sum E(X/Y=y_j)\, P(Y=y_j)$$

Preuve

$$\sum E(X/Y=y_j)\, P(Y=y_j) = \sum_i \sum_j x_i \frac{p_{ij}}{p_{.j}} p_{.j}$$

$$= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum x_i p_{i.}$$

$$= E(X)$$

Remarques

1) pour la définition $E(X/Y=y_j)$ existe sous la condition de la convergence de la série $\sum |x_i|\, P(X=x_i/Y=y_j)$

2) pour le théorème de l'espérance conditionnelle sous l'hypothèse de l'existence de $E(X)$.

Scanned by CamScanner

Exercice 1 :

Une urne contient 6 jetons : deux sont numérotés 0, trois sont numérotés 1, un jeton numéroté 2.
On tire sans remise deux jetons de cette urne.
On note X la v.a égale à la valeur du premier jeton tiré.
On note Y la v.a égale à la valeur du second jeton tiré.

1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y
3) On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 2 :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendants telles que :

$$X \hookrightarrow b\left(2; \tfrac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{0,1,2\}}$$

1) Déterminer la loi de la v.a. $Z = |X - Y|$
2) En déduire $E(Z)$ et $Var(Z)$.

Exercice 3 :

Soit (X, Y) le couple de v.a dont la loi conjointe $P_{(X,Y)}$ est donnée par

X \ Y	0	1
0	a	b
1	b	a

1) Trouver une relation entre a et b
2) Pour quelle(s) valeur(s) de a et b avoir $cov(X, Y) = 0$
3) Pour quelles valeurs de a et b X et Y sont indep