TP N°4 : Système linéaire (méthode itérative)

Considérons le système d'équations linéaires suivant que l'on cherche à résoudre :

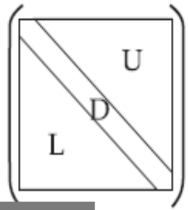
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ::: + a_{1n}x_n = b_1}\\
&\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ::: + a_{2n}x_n = b_2}\\
&\mathbf{:}\\
&\mathbf{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ::: + a_{nn}x_n = b_n}
\end{aligned}
$$

Ce système peut aussi s'écrire :

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.
$$

<u>Méthode de Jacobi</u>

On décompose la matrice A sous d'une somme de matrice : A=L+D+U où L et U sont des matrices triangulaires respectivement inférieur et supérieur et D est une matrice diagonale.



Le système à résoudre peut alors s'écrire :

$$(\mathrm{L} + \mathrm{D} + \mathrm{U})\mathrm{X} = \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{D}\,\mathrm{X} = \mathrm{B} - (\mathrm{L} + \mathrm{U})X$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(k)}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
-
\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(k-1)}
$$

En partant d'un vecteur $X_{(0)}$ initial donnée, on calcule Successivement les nouveaux vecteurs $X_{(1)}$ puis $X_{(2)}$ …… par la formule récurrence :

$$\mathbf{X_{(k)} = D^{-1}\left(B - (L + U)\,X_{(k-1)}\right)}$$

soit

$$x_{i_{(k)}} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_{j_{(k-1)}}\right]$$

Pour i=1,……n

<u>Exercice:</u>

Soit à résoudre le système d'équations :

$$
\begin{aligned}
10\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 &= 6\\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25\\
2x_1 - x_2 + 10\,x_3 - x_4 &= -11\\
3x_2 - x_3 + 8\,x_4 &= 15
\end{aligned}
$$

1. Ecrivez ce système sous forme matricielle.
2. faire un programme qui résout ce système par la méthode de Jacobi en partant du vecteur initial $x^{(0)} = (0; 0; 0 ;0)$. Arrêter les calculs lorsque $|x^k - x^{k-1}| < 0.00001$

Manipulations :

1. Entrer la matrice A et le vecteur colonne B
2. Entrer le vecteur initiale X0 et la précision TOL
3. Calculer le nombre des lignes « n » et colonnes « m » par la fonction Matlab « size »
4. Pour i= 1 à n

   Initialiser la variable som

   Pour j=1 à m

   Si j≠i calculer : $som = \sum a(i,j)\, X0(j)$

   Fin pour j

   Calculer X (i)

   Fin pour i
5. Arrêter si $\|X - X0\| < TOL$