Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2019/2020.
2ème année Math_L2-S2

Mathématiques Appliquées aux autres Disciplines

- MAD -

(Support de cours)

Par Fethi ABI-AYAD
E-mail : fethi65@yahoo.com

Petite histoire de la naissance des mathématiques
(La pensée mathématique)

I - Introduction

L'étrangeté du statut des mathématiques a intrigué les savants depuis la nuit des temps.

Pythagore (VI$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.) déjà avait une position assez claire : l'essence même du monde réel, sa structure, son architecture, sont mathématiques.

Cette conception a l'avantage d'expliquer parfaitement l'efficacité des mathématiques sans que cela pose le moindre problème.

Aussi, celui qui véritablement lança le débat sur la nature des mathématiques fut le philosophe grec Platon (428-347 avant J.C.). Il existe d'après lui un monde fait d'idées pures et d'idéaux (La Beauté, la vérité, etc...) dont on ne voit, dans le monde sensible, que de pâles copies dégradées (la perfection n'est jamais atteinte dans le monde sensible).

Les mathématiques, bien entendu, font partie du monde des idées. On y trouve les idées des cercles et des triangles parfaits, des droites etc.. Dans le monde sensible (réel) en revanche, cercles, triangles et autres figures géométriques sont, par définition imparfaits.
L'homme, par contre, a le moyen d'accéder au monde des idées par le seul biais de sa pensée. C'est pourquoi il peut faire des mathématiques.

Dans un discours plus moderne, mais toujours fondé sur la conception de Platon, le courant platonicien exerce encore aujourd'hui une forte emprise, notamment chez les mathématiciens eux même.
Comme l'a brillament exposé le mathématicien Alain Connes (Médaille Fields) les matheux, en faisant des mathématiques, ont souvent l'impression, presque physique, d'explorer une réalité indépendante

de leur pensée (Il faut penser ici que l'on découvre les mathématiques).
Malheureusement, personne ne peut aujourd'hui dire de quoi est faite cette prétendue "réalité" du monde mathématique ni où elle se trouve.

Une thèse opposée, le conceptualisme (principe ancêtre du principe de constructivisme ou celui de l'intuitionnisme), propose une théorie alternative : on ne découvre pas les maths, on les construit avec notre esprit. Comme le précise le philosophe Jean-Jacques Szczeciniarz (prof. - Bordeaux III) : "Pour le conceptualisme n'existent que les objets dont on peut avoir l'expérience intuitive ou qu'on peut construire (intellectuellement) suivant des règles intuitives. Ce sont des objets mentaux.

II - <u>Les mathématiques et la réalité</u>

Malgré le côté abstrait des mathématiques le physicien Bohr pensait qu'elles traduisaient toutes des relations matérielles ou conceptuelles existantes ou possibles. De part sa nature, l'esprit de l'homme extrait de ce qu'il perçoit et conçoit intellectuellement une sorte de "<u>quintessence</u>" structurelle (<u>ce</u> qu'il y a de principal, de meilleur, de parfait de ce qu'il perçoit) décrite dans
exprimée par des formules mathématiques
un langage formalisé. Et, comme le prouve l'exemple de la géométrie <u>non</u> euclidienne, parfois cette quintessence vient à l'esprit avant que la réalité ne lui ait donné la matière nécessaire, comme si notre cerveau était une machine à imaginer les relations qu'il pourrait percevoir dans la nature :

<u>Avènement de la géométrie non euclidienne</u>

Ce fut certainement l'une des plus troublantes affaires scientifiques de tous les temps : A la fin du $19^{ème}$ siècle, la communauté scientifiques découvrit la géométrie non euclidienne, véritable bizarrerie mathématique, destinée - pensait-on - à illustrer le don des mathématiciens à engendrer par l'imagination des "objets" aussi improbables qu'inutiles. Le choc fut rude lorsque, quelques décennies plus tard, au début du 20ème siècle, la <u>géométrie non euclidienne</u> trouva une application éclatante dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, car <u>elle</u> décrivait parfaitement la structure intime de l'espace-temps.

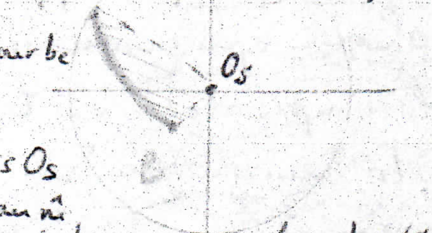
<u>Remarque</u>: Alors que depuis Euclide (IVe - IIIe siècle avant J.C) la géométrie se faisait sur un espace plan, des mathématiciens fondèrent au 19ème siècle d'autres formes de géométries, dites non euclidiennes. On commença alors à explorer la géométrie sur des espaces sphériques et des espaces en "selle de cheval" qui ne respectent pas les théorèmes ~~d'~~ euclidiens. Au début du 20e siècle, Einstein se servit de la géométrie non euclidienne pour décrire la structure de l'univers. D'après la théorie de la relativité, toute masse "creuse" l'espace, qui devient courbe : les rayons lumineux changent de direction tout en se déplaçant en ligne droite. D'un pt de vue mathématique, ceci s'explique par le fait suivant:

Relativement à un repère sphérique, par exemple, on peut considérer la ligne qui lie directement 2 pts quelconques de la sphère tout en restant sur la sphère comme 1 <u>droite</u> (Voir fig.)

Relativement à la sphère (S'), la courbe $[\widehat{AB}]$ est 1 morceau de droite si les 3 pts O_s A et B appartiennent au même plan euclidien, O_s étant le centre de la sphère (S)

et tous les pts de $[\widehat{AB}]$

(S')



D'après Dominique Lambert, professeur de philosophie des sciences à l'université de Namur (Belgique), l'histoire nous montre que la plupart des mathématiques finissent, tôt ou tard, par trouver une application dans les sciences physiques. Comment résister alors à la tentation de faire des mathématiques, sinon un principe universel, du moins le moteur de la nature elle-même ? Tout se passe comme si l'Univers, suivant l'idée de Galilée (1564-1642) - premier savant moderne - était comme écrit en langue mathématique, et qu'il nous était donné, à nous les hommes, l'honneur de découvrir cette langue grâce à la seule puissance de notre pensée. Chose que personne ne l'a jamais vraiment démontré.

III Questions philosophiques sur l'origine (ou la naissance) des mathémat.

La reine des sciences exactes pose un problème philosophique de taille qu'on peut résumer dans la question suivante : Les mathématiques existent-elles en dehors de nous (auquel cas on les découvre) ou sont-elles en nous (auquel cas on les invente)?

La première hypothèse (les maths existent en dehors de nous) serait, à priori, la plus satisfaisante car elle rend compte de leur universalité. Malheureusement, elle renvoie à un problème autrement plus difficile : si les mathématiques sont une réalité, comme la pierre, où est cette réalité ?

La seconde hypothèse (les mathématiques sont une invention mentale) nous libère des questions précédentes mais elle nous plonge dans une autre énigme : Si elles sont inventées par l'homme, pourquoi les phénomènes physiques suivent ses lois? (celles des maths)

Le scientifique se doit de trancher (décider de ce que sont les maths) la question. Sinon, on ne voit pas comment il pourrait continuer à faire pleinement confiance à une science, réputée comme la plus parfaite et la plus pure d'entre toutes, qui manque de fondements scientifiques! Par chance, un courant philosophique qui commence à se faire entendre - armé de nouveaux outils empruntés à certaines disciplines (notamment le cognitivisme et la neurologie) - est arrivé à une maturité suffisante pour esquisser (résumer, donner les grandes lignes) une réponse à l'énigme des mathématiques : c'est l'objet d'une théorie moderne.

Ce courant nous apprend que les mathématiques naissent dans notre cerveau et n'existent pas en dehors de nous, qu'elles expriment de manière abstraite, notre capacité à voir, sentir et reconnaître le réel et qu'elles (tjrs les maths) constituent un véritable réservoir de concepts pour affronter la tâche, difficile entre toutes, de survivre et de continuer à se développer.

A ce niveau, découvrons les fondements biologiques et humains des mathématiques.

Le premier qui esquissa une théorie moderne sur l'efficacité des mathématiques a été le physicien danois Niels Bohr (1885-1962). Héritier de la longue histoire des idées sur la nature des mathé-matiques, il considérait que celles-ci sont une représentation formalisée de toutes les relations possibles entre objets et entre concepts. Par exemple, la proposition mathématique "43 est supérieur à 37" renvoie aussi bien à l'idée que dans 1 ensemble de quarante trois pommes il y a plus de pommes que dans un ens. de trente-sept pommes, qu'une voiture qui roule à 43 km/h va plus vite qu'1 autre qui se déplace à 37 km/h, qu'un édifice haut de 43 mètres est plus élevé qu'1 édifice de 37m, etc.

Notre esprit est capable, à partir de ces différentes situa-tions (on peut en énoncer une infinité), d'extraire le concept "43 est supérieur à 37" qui n'est que la formalisation d'une relation (entre objets ou entre idées) d'où la notion d'équation ou d'inéquation en mathématiques pour illustrer cette relation.

Cette nouvelle conception, si elle a l'intérêt d'expliquer comment les mathématiques sont reliées à l'esprit et à la réalité, ne dit pas pourquoi, au cours du développement de l'homme à travers les civili-sations, une telle capacité est apparue. Bref, si les mathématiques existent dans notre esprit, c'est parce qu'elles jouent sans doute un rôle dans notre adaptation à la réalité mais lequel ?

Une question préliminaire s'impose : qu'est ce que la réalité ? Le cerveau reconnaîtrait le réel grâce à la permanence des perceptions. Ainsi, quand l'être humain (et sans doute même les animaux) regarde un arbre dans un paysage, ce qui lui indiquerait que ce qu'il voit est bien l'objet réel c'est la permanence de l'objet, même lorsque le point de vue, l'éclairage, etc. changent. L'acte mental inconscient qui consiste à isoler ce qui ne varie pas de la diversité — des couleurs, formes, textures et sons en permanente évolution que nos sens perçoivent, est un des mécanismes de reconnaissance du réel. Il semblerait donc que l'homme construise des objets mentaux dans lesquels sont capturées les caractéristiques invariantes des objets qu'il perçoit.

Or, la recherche d'invariants est précisément ce qui caractérise l'activité mathématique. Les mathématiciens recherchent souvent à extraire des objets mentaux qu'ils manipulent, quelque chose d'invariant – c'est à dire un nombre, une structure, une relation – qui ne varie pas lorsqu'on y opère des transformations.

• Exemple de la structure de groupe.

En mathématiques, un groupe est un ensemble d'éléments munis d'une loi interne notée $*$ et obeissant aux propriétés suivantes:

a) $*$ est associative $(\forall a,b,c \in G \ (a*b)*c = a*(b*c))$

b) $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G \ / \ a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ où e est l'élém neutre de G.

Dans la réalité, il y a beaucoup d'ensembles d'éléments qui, munis d'une certaine opération, possèdent la structure de groupe. Considérons, par exemple, l'ensemble des heures d'une montre: $0^h = 12^h, 1^h, 2^h, 3^h, 4^h, 5^h, 6^h, 7^h, 8^h, 9^h, 10^h, 11^h$. Muni de la loi d'addition des heures, cet ensemble a une structure de groupes. En effet, il possède un élément neutre qui est 0^h (ex: $0^h + 3^h = 3^h + 0^h = 3^h$). De plus, tout élément possède un inverse : s'il est 4^h et on rajoute 8^h on retombe sur 0^h $(4^h + 8^h = 8^h + 4^h = 12^h = 0^h)$. Enfin, l'associativité est vérifiée puisque $x^h + (y^h + z^h) = (x^h + y^h) + z^h$ où $x^h, y^h, z^h \in \{0^h, 1^h, \dots, 11^h\}$.