CROISSANCE RELATIVE.

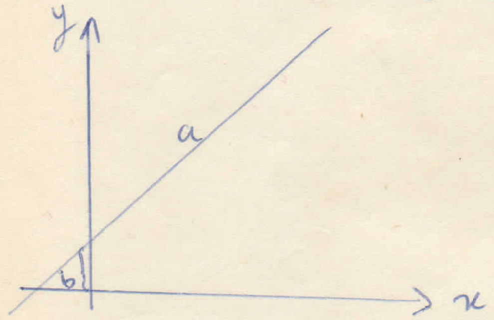
A - La relation d'Allométrie.

~~Elle s'écrit~~
Teissier (1948) a montré que les dimensions de 2 parties différentes d'1 organisme sont liées par la relation dite d'allométrie $\boxed{y = bx^a}$ (1)
a et b ctes.

En coordonnées logarithmiques, l'éq (1) devient

$$\boxed{\log y = \log b + a \log x} \quad (2)$$

C'est 1 dte dont on peut dét. les paramètres a et b.
Dans le cas d'1 étude biométrique (a) a une signification biologique précise



B - isométrie - Allométrie.

1 - définition : On parlera dans le cas d'1 relation entre 2 variables de même dimension (ex poids d'1 individu et poids de ses gonades) :

- Si a = 1, d'isométrie entre y et x
- Si a ≠ 1, d'allométrie entre y et x

si a > 1, on parlera d'allométrie majorante ou positive c.a.d que y croît + vite que x.

si a < 1, " d'allométrie minorante ou négative de y par rapport à x c.à.d que y croît ⊖ vite.

Dans le cas de 2 variables de dimension différentes (volume - poids et volume - longueur) :

- si $a = 3$ d'isométrie
- si $a \neq 3$ d'allométrie

  si $a > 3$ → allométrie majorante

  si $a < 3$ → allométrie minorante.

2 - choix du paramètre a.

Soit 2 variables x et y reliés linéairement, et n couples (x, y)

Quelle est la dte qui va représenter le mieux ces n couples ?

Rép : nous disposons de 2 coefficients :

- a : coefficient de regression ou pente de la dte de regression de y en x.

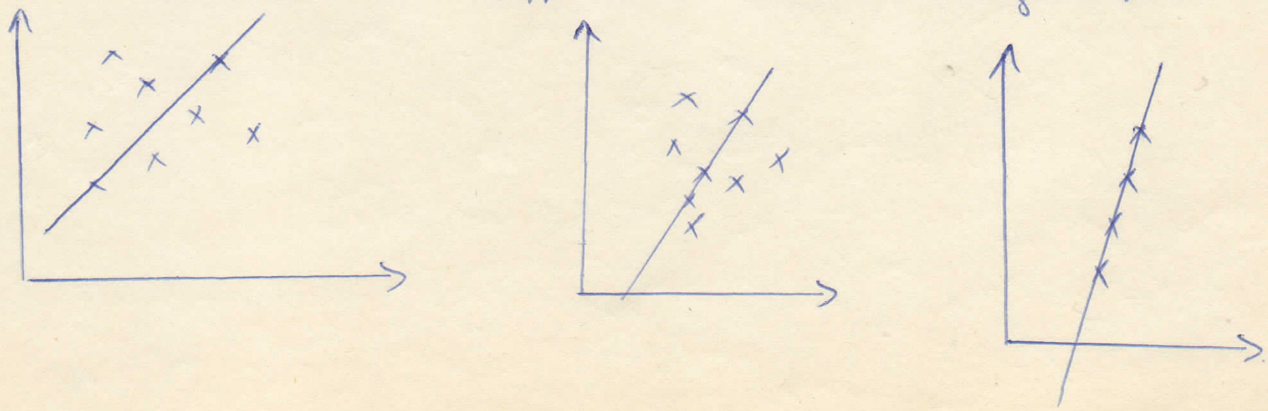
On utilisera ce coeff si on veut estimer 1 des variables par rapport à une autre qui servira de référence, ou si l'on fixe 1 dépendance d'1 variable par rapport à 1 autre.

- a_T : coefficient de la droite des moindres rectangles ou pente de l'axe majeur réduit. On l'utilisera si on suppose à priori que l'une des variables n'est pas fonction de l'autre. ou si ces 2 variables dépendent d'autres variables.

a et a_T sont liés par la relation : $\boxed{a_T = \dfrac{a}{r}}$

r = coeff. de corrélation.

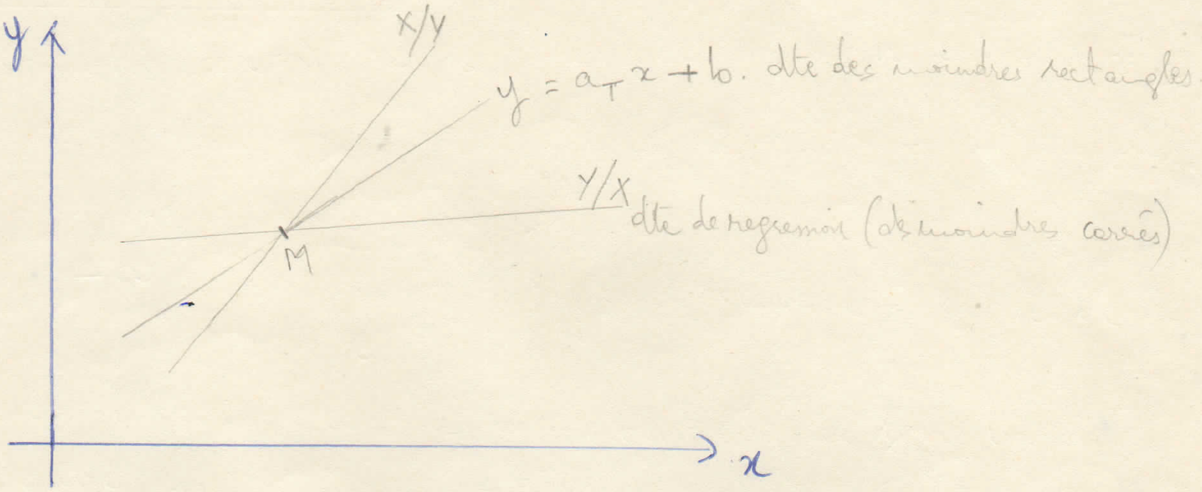
r permet de matérialiser l'applatissement du nuage de points.



r est compris entre ~~0~~ -1 et 1

r augmente et tend vers 1 lorsque le nuage de pts tend vers l'alignement.

r diminue qd la dispersion des pts augmente



M est le point moyen des x et des y

$M(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n}{n}$$

$$\bar{y} = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots y_n$$

Plus les dtes se rapprochent et plus r est grand. (r se rapproche de 1

3_ Application de la relation d'allométrie

– tout d'abord croissance d'un individu donné (allométrie de croissance individuelle)

– Comparaison d'individus d'1 même espèce mais d'âge ou de taille différents (allométrie de taille intraspécifique)

~~Notamment l'allo~~

Dans 1 m̂ espèce, l'action des facteurs du milieu ambiant provoquer des Δ appréciables du type de croissance, ceci dit les populations doivent être soumises à l'analyse biométrique pour étudier les Δ de forme d'1 m̂ espèce vivant dans différentes zones de l'aire de répartition

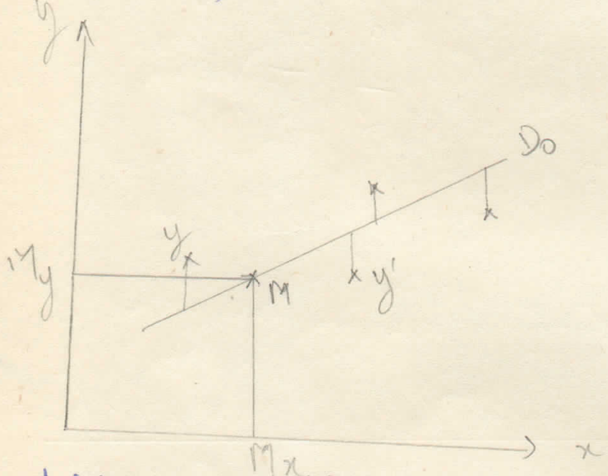
– l'étude de la croissance relative entre différents dimensions de l'animal, permet aussi le passage d'une dimension concernée par l'étude de la croissance de la population aux autres dimensions de l'animal, à l'aide des équations de regression calculées.

- Elle peut aussi permettre la comparaison d'individus de taille variés appartenant à des races, espèces ou genres différents (utilisés en taxonomie, en paléontologie)

4 – Calcul des paramètres a, a_T, r

a – calcul de la pente de la dte de régression (a)

La droite choisie est celle qui rend minimum, la Σ des carrés des écarts des pts à cette droite, comptée parallèlement à Oy c.à.d sur la fig $\sum (y-y')^2$ pour l'ens des pts du nuage.



La droite ainsi définie est appelée droite des moindres carrés ou dte de regression empirique ou observée.

La dte Do passe par le centre de gravité du nuage de pts, c.à.d le pt ayant pour coord. (M_x, M_y) de l'échantillon des x et des y.

Do a pour pente $a = p_0 = \dfrac{\sum(x - m_x)(y - m_y)}{\sum(x - m_x)^2}$ (1)

on peut l'estimer par $p_0 = \dfrac{\text{estim } cov(x,y)}{\text{estim } var(x)}$

la cov de x, y $\boxed{Cov(x,y) = \frac{\Sigma(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{N}}$

μ = moyenne

N = nbre de couples (x, y) ds la population

Cette cov peut être estimée sur 1 echant. n couples (x, y) de moyenne (m_x et m_y) par :

$$\boxed{Cov(x,y) = \frac{\Sigma(x-mx)(y-my)}{n-1}}$$

b - calcul du coefficient de corrélation r.

pour juger de quelle manière la dte des ⊙ s'écarte trop de l'horizontal on ne considère pas sa pente mais l'expression

$$\boxed{r = p_0 \frac{Sx}{Sy}} \quad (2)$$

S = estimation de l'écart-type ds l'échantillon

r est donc la valeur de la pente lorsque x et y sont exprimés en prenant Sx et Sy comme unité. Comme pour les écarts réduits.

$\frac{Sx}{Sy}$

écart-type = $\sqrt{\text{variance}}$

N effectif = N - 1 d d l

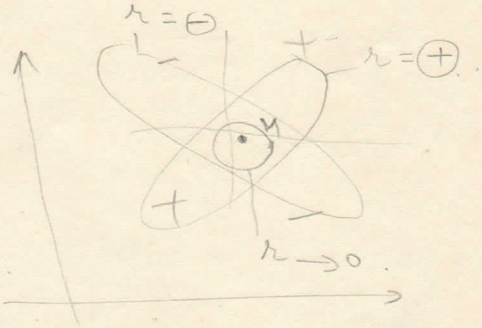
$$Var = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N-1}$$

$$\frac{Sx}{Sy} = \frac{\sqrt{\Sigma(x-mx)^2/n-1}}{\sqrt{\Sigma(y-my)^2/n-1}} = \frac{\sqrt{\Sigma(x-mx)^2}}{\sqrt{\Sigma(y-my)^2}}$$

$$r = p_0 \cdot \frac{\sqrt{\Sigma(x-mx)^2}}{\sqrt{\Sigma(y-my)^2}} = \frac{\Sigma(x-mx)(y-my)}{\Sigma(x-mx)^2} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma(x-mx)^2}}{\sqrt{\Sigma(y-my)^2}}$$

$$\boxed{r = \frac{\Sigma(x - mx)(y - my)}{\sqrt{\Sigma(y - my)^2}\sqrt{\Sigma(x - mx)^2}}} \qquad (3)$$

$$r = \frac{cov\,(x,y)}{Sx \cdot Sy}$$



r varie tjs entre −1 et +1.

On démontre que $\boxed{a_T = \frac{a}{r} = \frac{Sy}{Sx}}$

c- simplification des calculs.

$$r = \frac{\sum (x - m x)(y - m y)}{\sqrt{\sum (x - m x)^2 \cdot \sum (y - m y)^2}}$$

dans la simplification, 1er travail à faire : changement d'unité ou d'origine

$$r = \frac{\sum (x' - m x')(y' - m y')}{\sqrt{\sum (x' - m x')^2 \cdot \sum (y' - m y')^2}}$$

2e. exprimer de façon différente, la Σ des carrés et des produits

$$\sum (x' - m_{x'})^2 = \sum x'^2 - 2 \sum x' \cdot m'_x + \sum m'^2_x$$

$$= \sum x'^2 - 2 \sum x' \cdot \frac{\sum x'}{n} + \left(\frac{\sum x'}{n}\right)^2$$

$$= \cancel{\sum x'^2 - 2 \sum x' \frac{\sum x'}{n} + \left(\frac{\sum x'}{n}\right)^2} = \left[\sum x'^2 - 2 \left(\frac{\sum x'}{n}\right)^2 + \frac{(\sum x')^2}{n^2}\right]$$

$$\sum (x' - m x')^2 = \sum x'^2 - \frac{(\sum x')^2}{n}$$

$$\sum (y' - m y')^2 = \sum y'^2 - \frac{(\sum y')^2}{n}$$

$$\sum (x' - m x')(y' - m y') = \sum x' y' - \sum x' \cdot m y' - \sum y' \cdot m x' + n \cdot m x' m y'$$

$$= \sum x' y' - \sum x' \cdot \frac{\sum y'}{n} - \sum y' \cdot \frac{\sum x'}{n} + \cancel{n} \cdot \frac{\sum x'}{\cancel{n}} \cdot \frac{\sum y'}{n}$$

$$= \sum x' y' - \frac{\sum x' \sum y'}{n}.$$

$$\boxed{r = \frac{\sum x'y' - \frac{\sum x' \sum y'}{n}}{\sqrt{\left[\sum x'^2 - \frac{(\sum x')^2}{n}\right] \cdot \left[\sum y'^2 - \frac{(\sum y')^2}{n}\right]}}}$$

+++

3° - groupement des données surtout lorsqu'elles sont nombreuses.

d - test d'indépendance.

définition : test d'indépendance entre 2 variables x et y à partir de n couples de valeurs (échantillon) est basé sur la valeur de la pente en coord. réduits, autrement dit r.

$$r = \frac{\sum (x - mx)(y - my)}{\sqrt{\sum (x - mx)^2 \cdot \sum (y - my)^2}}$$

le risque α correspondant à r peut être obtenu soit par la table du coeff. de corrélation pour un d.d.l $= n - 2$, soit

nbre de classe

lorsque celle-ci est insuffisante par

$$\boxed{t = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \sqrt{n - 2}}$$

et en cherchant le risque correspondant, dans la table de t, pour 1 d.d.l $= n - 2$.

il y a 2 cas :

- si $\alpha > 5\%$, liaison entre x et y n'est pas significat.
- si $\alpha \leq 5\%$, " " " est significative et

α mesure le degré de signification.

c - Relation taille - poids.

1 - principe :

l'expression qui lit la taille L et poids W d'1 poisson est de la forme $W = aL^b$.

a et b paramètre dépendant des unités choisies.
b reflète à la fois l'allométrie de croissance et l'amplitude de la distribution des tailles de l'échantillon.

Pour déterminer a et b, on écrit :

$$\boxed{\underset{y}{\operatorname{Log} W} = \underset{b}{\operatorname{Log} a} + \underset{a}{b}\,\underset{x}{\operatorname{Log} L}}$$

on calcul $b_{y/x}$ ensuite $\log a$, le pt M et je trace la dte

$$b_{y/x} = \frac{\Sigma(x - m_x)(y - m_y)}{\Sigma(x - m_x)^2}.$$

2 - Comparaison de croissance :

b est souvent utilisé pour comparer, l'allure de croissance entre les échantillons ou les populations

- cas de l'isométrie de croissance :

le poids croît comme le cube de la longueur $b = 3$.

- cas de l'allométrie de croissance

le poids ne croît pas comme le cube de la longueur $b \neq 3$.

d'1 façon générale b reste voisin de 3.

le test statistique indiquant de quelle manière, b reste $\neq$ d'1 valeur de référence est le test de student. Ce test permet de juger :

- s'il y a allométrie ou isométrie de croissance en comparant b à 3, dans 1 échantillon n

soit $t = \dfrac{b - 3}{\sigma}$ avec $d.d.l = n - 2$.

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{n-2}\left[\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2} - \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}\right]$$

Exercice = soit les 2 variables y (longueur totale) et x (longueur céphalothoracique) en mm, obtenus sur 1 population de crevettes. Calculer la regression de y en x et le coefficient de corrélation qui lie ces 2 Δ.

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
21	84	-7	-17	49	289	119
23	90	-5	-11	25	121	55
25	95	-3	-6	9	36	18
27	99	-1	-2	1	4	2
29	103	1	2	1	4	2
31	108	3	7	9	49	21
33	112	5	11	25	121	55
35	117	7	16	49	256	112
$\bar{x} = 28$ mm	$\bar{y} = 101$ mm			$\Sigma = 168$	$\Sigma = 880$	$\Sigma = 384$

$$a = \frac{\Sigma(x-mx)(y-my)}{\Sigma(x-mx)^2} = \frac{384}{168} = 2,28.$$

$$r = \frac{\Sigma(x-mx)(y-my)}{\sqrt{\Sigma(y-my)^2}\ \sqrt{\Sigma(x-mx)^2}}$$

$$r = \frac{384}{72 \times 29,6} = 0,99.$$

$$b = -a\bar{x} + \bar{y} = -(28 \times 2,28) + 101 = 36,99$$

$$y = 2,28x + 36,99.$$

Détermination de $L\infty$ sans connaissance de l'âge (WETHERALL et al 1984)

Cette méthode est basée sur l'analyse des fréquences. Il est démontré que la longueur moyenne de poissons capturés est une fonction linéaire de la taille de capture L_c.

$$\bar{L} = L_\infty \left(\frac{1}{1+\theta}\right) + L_c \left(\frac{1}{1+\theta}\right)$$

$$\theta = \frac{L\infty - \bar{L}}{\bar{L} - L_c} \quad ; \quad \theta = \frac{Z}{K}.$$

La méthode repose sur les hypothèses de base suivants :
- population en équilibre.
- croissance en longueur de type Von Bertalanffy
- taux de mortalité garde valeur moyenne constante.

Les fréquences relatives des longueurs par classe de taille sont regroupés pour la durée de l'échantillon.
Les valeurs obtenues sont multipliés par L_i (centre de classe).
On cumule les résultats, on commence par les plus grandes taille ce qui permet le calcul des longueurs $\bar{L}_i$ pour chaque classe de taille.
Les valeurs $\bar{L}_i$ sont ensuite reportées en fonction de L_i correspondants
On définit segment rectiligne de la courbe résultante.

$\bar{L}_i$ en fonction de L_i

$$\bar{L}_i = \frac{\Sigma(\% \times L_i)\text{ cumulés}}{\Sigma\%\text{ cumulés}}.$$

La regression linéaire des pts choisies est de la forme :

$$\overline{L}_i = a + bL_i .$$

et permet de determiner $L\infty$ et $\frac{Z}{K}$.

$$L\infty = \frac{a}{1-b} \quad \text{et} \quad \frac{Z}{K} = \frac{b}{1-b}.$$

$L\infty$ correspond à l'intersection de la droite avec la 1ère bissectrice.

Z = coefficient instantanée de mortalité totale.

K = cte de l'équation de Von Bertalanffy.

2 - Détermination de K sans connaissance de l'âge

PAULY et MUNRO (1984) ont présenté 1 méthode pour l'estimation de la valeur de K compatible avec les valeurs de $L\infty$ et K fournis par la litterature régionale.

ϕ' moyen est calculé à partir de l'équation empirique proposée par les auteurs :

$$\phi' = \log_{10} K + 2 \log_{10} L\infty .$$

$$\Rightarrow \quad \phi'_{moyen} = \log_{10} K + 2 \log_{10} L\infty .$$