Département de Mathématiques
Master edp et applications A.U 2019/2020
Méthodes de résolution des pbs elliptiques

Corrigé des exercices
Minimisation avec et sans contraintes

Exercice1

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u;u) - L(u)$$

1. J est dérivable au sens de Frechet sur V,
   utilisant la bilinéarité et la symétrie de a , on a

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w;u+w) - L(u+w) \\ &= J(u) + a(u;w) + \frac{1}{2}a(w;w) - L(w) \end{aligned}$$

   La forme bilinéaire a étant continue, $a(w;w)$ est égale à $o(w)$. J est donc dérivable et

$$\langle J\prime(u);w\rangle = a(u;w) - L(w)$$

   c.à.d

$$J\prime(u) = a(u;.) - L(.)$$

2. Montrons que $J\prime$ est dérivable au sens de Frechet

$$\begin{aligned} J\prime(u+w) &= a(u+w;) + L \\ &= a(u;) + a(w;) + L \\ &= J\prime(u) + a(w;) \end{aligned}$$

   Donc,

$$J''(u)\,w = a(w;)$$

   càd

$$J''(u)\,(v;w) = a(w;v)$$

Exercice2

Soient K un convexe fermé non vide de V , a une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur $V \times V$ et L une forme linéaire continue sur V.

1. Considérons la fonctionnelle J définie sur V par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - Lv$$

d'après l'ex.1, a étant symétrique,

$$J\prime(u) = a(u;.) - L(.) \tag{1}$$

puisque la forme bilinéaire a est coercive sur $V \times V$

$$\exists \alpha > 0, \forall \xi \in V;\ a(\xi;\xi) \geq \alpha \|\xi\|^2$$

alors pour tout $u, v \in V, u \neq v$,on a

$$\begin{aligned} \langle J\prime(u) - J'(v)\,; u - v\rangle &= a(u; u-v) - a(v; u-v) \\ &= a(u-v; u-v) \geq \alpha \|u-v\|^2 > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Par (2) , J est strictement convexe. Elle admet donc un unique minimum u sur le convexe fermé non vide K.

2. (voir cours), un élément $u \in K$ est un minimiseur de J sur K si et seulement si

$$\forall v \in K; \langle J\prime(u); v-u\rangle \geq 0$$

alors, par (1) donnant l'expression de $J\prime$, on obtient,

$$a(u; v-u) \geq L(v-u); \forall v \in K$$

Exercice3.

1. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on note

$$\|v\|_2 := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après l'inégalité de Poincaré,$\|.\|_2$est une norme équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(\Omega)$.
Soit (u_n) une suite minimisante de J sur K

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

$$K = \left\{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}$$

Remarquer que

$$J(u) = \|u\|_2^{2.} \tag{3}$$

D'après le Théorème de Rellich, il existe une sous suite de (u_n) (notée encore (u_n))

et un élément $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que (u_n) converge vers u dans $L^2(\Omega)$. Montrons que (u_n) est convergente dans $H_0^1(\Omega)$.
Tout d'abord utilisant la définition de$\|.\|_2$, on a

$$\left\|\frac{u_n - u_p}{2}\right\|_2^2 = \frac{\|u_n\|_2^2 + \|u_p\|_2^2}{2} - \left\|\frac{u_n + u_p}{2}\right\|_2^2 \tag{4}$$

On note

$$m = \inf_{v \in K} J(v)$$

et

$$\alpha_{n,p} = \left\|\frac{u_n + u_p}{2}\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{5}$$

Comme (u_n), converge vers u dans $L^2(\Omega)$, et $u_n \in K, (K$ fermé$)$,alors $u \in K$ et $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. De plus,

$$\alpha_{n,\,p} \underset{n\ ,\ p\ \to +\infty}{\to} 1$$

D'après l'équation (4),

$$\left\|\frac{u_n - u_p}{2}\right\|_2^2 = \frac{\|u_n\|_2^2 + \|u_p\|_2^2}{2} - \alpha_{n,p}^2 \left\|\frac{u_n + u_p}{2\alpha_{n,p}}\right\|_2^2$$

Comme $\frac{u_n+u_p}{2\alpha_{n,p}} \in K$, on a donc

$$\left\|\frac{u_n - u_p}{2}\right\|_2^2 \leq \frac{\|u_n\|_2^2 + \|u_p\|_2^2}{2} - \alpha_{n,p}^2 m$$

dont le membre de droite tend vers 0 car $\alpha_{n,p}$ tend vers 1 et $\|u_n\|_2^2$ et $\|u_p\|_2^2$ tendent vers m (par définition d'une suite minimisante et (3)). Ainsi,

$$\left\|\frac{u_n - u_p}{2}\right\|_2^2 \underset{n,p \to \infty}{\to} 0$$

et (u_n) est alors une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$.Par conséduent, (u_n) converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u et $J(u) = m$.

2. Soit

$$F(v) = 1 - \int_\Omega |v|^2 \, dx$$

L'ensemble de minimisation K s'écrit alors,

$$K = \left\{v \in H_0^1(\Omega) : F(v) = 0\right\}$$

De plus, F est dérivable et pour tout $v; w \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\langle F\prime(v); w\rangle = -2\int_\Omega vw dx$$

de même, J est dérivable et

$$\langle J\prime(v); w\rangle = 2\int_\Omega \nabla v.\nabla w dx$$

D'après th. du cours de minimisation avec contraintes, comme $F\prime$ est non nul pour tout élément de K (et donc en particulier pour u), il existe λ tel que

$$J\prime(u) + \lambda F\prime(u) = 0$$

c'est- à-dire tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx \tag{6}$$

Ainsi, u est un vecteur propre de valeur propre λ . En choisissant $v = u$ dans l'expression(6), on déduit de plus que

$$\lambda = m$$

Enfin, par définition de m nécessairement c'est la plus petite valeur propre du Laplacien avec conditions de Dirichlet.

Exercice4

1. On reformule le problème comme suit:
   Posons

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

   et K l'ensemble

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : F(v) \leq 0 \right\}$$

   où

$$F(v) = \|v - f\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon^2$$

   alors déterminer

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)\ \|u-f\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

   revient à minimiser J sur K.
   L'ensemble K est un convexe fermé et la fonctionnelle J est strictement convexe. Il existe donc une unique solution u_ε au problème de minimisation de J sur

   ---

   Remarque: il s'agit d'une minimisation avec contraintes d'inégalité de la forme :

$$\inf_{v \in V, F(v) \leq 0} J(v)$$

Définition. Soit u tel que $F(u) \leq 0$.La contrainte est dite active en u si, $F(u) = 0$.
On dit que la contrainte d'inégalité est qualifiée en u si $F\prime(u) \neq 0$
Théorème. Si la contrainte est qualifiée en u tel que $F(u) \leq 0$. Alors, si u est un minimum local, il existe $\lambda \geq 0$, appelé multiplicateur de Lagrange, tel que

$$J\prime(u) + \lambda F\prime(u) = 0, \lambda \geq 0, \lambda = 0 \text{ si } F(u) < 0$$

---

2. Les fonctionnelles J et F sont toutes deux dérivables et, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\langle J\prime(u_\varepsilon); v\rangle = 2\int_\Omega \nabla u_\varepsilon.\nabla v dx$$

et

$$\langle F\prime(u_\varepsilon); v\rangle = 2\int_\Omega (u_\varepsilon - f)\, v dx$$

Si la contrainte est active, c'est- à-dire si $F(u_\varepsilon) = 0$, on a $F\prime(u_\varepsilon) \neq 0$, et d'apès le cours, il existe un réel λ (multiplicateur de Lagrange) tel que

$$J\prime(u_\varepsilon) + \lambda F\prime(u_\varepsilon) = 0;$$

c'est- à-dire tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla u_\varepsilon.\nabla v + \lambda\,(u_\varepsilon - f)\, v)\, dx = 0 \tag{7}$$

et

$$F(u_\varepsilon) = \left(\|u_\varepsilon - f\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon^2\right) = 0$$

On déduit de l'équation(7) que u_ε est solution du problème aux limites

$$\begin{array}{c} -\Delta u_\varepsilon + \lambda\,(u_\varepsilon - f) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

Si la contrainte n'est pas active (cas où $\varepsilon \geq \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$), on a $\lambda = 0$ et on trouve que $u_\varepsilon = 0$.

<u>**Exercice5**</u>
Soit A une matrice réelle d'ordre $p \times n$ et $b \in \mathbb{R}^p$.
On pose

$$J(x) = \|Ax - b\|^2$$

Soit K l'orthogonal du noyau de A.

$$\begin{aligned} K &= (\ker A)^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax.y = 0; \forall y \in \mathbb{R}^p\}^{\perp} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x.A^*y = 0; \forall y \in \mathbb{R}^p\}^{\perp} \\ &= \left(Im\,(A^*)^{\perp}\right)^{\perp} \\ &= Im\,(A^*) \end{aligned}$$

On introduit le réel défini par

$$\mu = \inf_{x \in K \|u\|=1} \|Au\|^2$$

Comme la sphère unité de K est un fermé compact, l'infimum est atteint en un élément u de cette sphère. De plus, u ne peut appartenir à la fois au noyau de A et à son orthogonal, car dans ce cas $u.u = 0$ d'une part et $\|u\| = 1$ d'autre part.On en déduit que μ est strictement positif.

Rappelons, les equivalences suivantes établies dans le cours:
une fonction J dérivable sur V est convexe si et seulement si
$J(v) \geq J(u) + \langle J\prime(u); v - u\rangle \ \forall u; v \in V$ avec $u \neq v$;
ou encore
$\langle J\prime(u) - J'(v)\,; u - v\rangle \geq 0 \ \forall u; v \in V$ avec $u \neq v$

_ _
Comme

$$\langle J\prime(x); y\rangle = 2(Ax - b).Ay$$

on a alors

$$\langle J\prime(u) - J'(v)\,; u - v\rangle = 2(Au - Av).A\,(u - v) > 0$$

Par conséquent, J est stictement convexe sur K convexe. Elle admet donc un unique minimum sur K qui est un minimum sur $\mathbb{R}^N$,car

$$\forall y \in \ker A;\ J(x + y) = J(x)$$

Comme

$$\langle J\prime(x); y\rangle = 2(Ax - b).Ay$$

l'équation d'Euler correspondante $J\prime(x) = 0$ s'écrit

$$2(Ax - b).Ay = 0;\ \forall y \in \mathbb{R}^N$$

c.à.d

$$A^*Ax = A^*b$$

Exercice6

Soit A une matrice symétrique d'ordre n et

$$J(x) = Ax.x$$

On note K la sphère unité, définie par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$$

où $F(x) = 1 - |x|^2$.
Notons que l'existence d'un minimiseur est évidente,car K est compact et J continue.

Les fonctions J et F sont toutes deux dérivables avec

$$J\prime(x) = 2Ax \quad \text{et } F\prime(x) = -2x$$

Comme $F\prime(x) \neq 0$pour $x \in K$, d'après Th. de cours, si x^* est un point de minimum de J sur la sphère unité, il existe un multiplicateur de Lagrange λ tel que

$$J\prime(x^*) + \lambda F\prime(x^*) = 0$$

c'est- a-dire

$$Ax^* - \lambda x^* = 0$$

Toute solution optimale x^* est un vecteur propre de A de valeur propre λ .
Le problème de minimisation de J sur K est donc équivalent au problème de minimisation de J sur l'ensemble des vecteurs propres de A de norme $= 1$.
Or pour tout vecteur propre x de A (tel que $|x| = 1$) associé à la valeur propre μ, on a

$$J(x) = \mu$$

Le minimum de J est donc atteint pour les vecteurs propres associés à la plus petite valeur propre.

Exercice supplémentaire

Soient Ω un ouvert borné, K un compact connexe de $\mathbb{R}^N$ inclus dans Ω tel que $\Omega \diagup K$ est régulier et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \diagup K \\ u = C & \text{sur } \partial K \\ \displaystyle\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 & \\ u = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \tag{8}$$

où C est une constante inconnue à déterminer.

1. Formulation variationnelle de (8)

   a) On introduit l'espace vectoriel E,

$$E = \left\{ v \in H^1(\Omega \diagup K) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega; v = \text{cste sur } \partial K \right\}$$

   E est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega \diagup K), E$ est muni de la norme de $H^1(\Omega \diagup K)$. C'est donc un espace de Hilbert.
   Remarquer que la constante dans la définition de l'espace E varie d'une fonction v à l'autre : on la désigne par $v(\partial K)$.

   b) On multiplie l' edp $\Delta u = f$ par $v \in E$ et on intègre sur $(\Omega \diagup K)$. ($cours$, formule de Green)

$$\int_{\Omega \diagup K} \Delta u.vdx \overset{\text{par parties}}{=} -\int_{\Omega \diagup K} \nabla u.\nabla vdx + \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} vds = \int_{\Omega \diagup K} f.vdx$$

   or,

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} vds \overset{v=\text{cste sur } \partial K}{=} v(\partial K) \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

   d'où la formulation variationnelle associée à (8) consiste à trouver $u \in E$ tel que

$$a(u; v) = L(v); \forall v \in E \tag{9}$$

   où

$$a(u; v) = -\int_{\Omega \diagup K} \nabla u.\nabla vdx \ \text{ et } L(v) = \int_{\Omega \diagup K} f.vdx$$

2. a) Existence et l'unicité d'une solution $(u; C)$. L'application du Théorème de Lax-Milgram est triviale grâce a l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de E et assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel (9).

   b) Equivalence avec le problème aux limites (8).On déduit immédiatement de la formulation variationnelle (9) que $\nabla u \in \left(L^2 (\Omega \diagup K)\right)^N$ et $\operatorname{div}(\nabla u) \in L^2(\Omega \diagup K)$ et $\Delta u = f$ pour presque tout $x \in \Omega \diagup K$
   (La divergence du gradient d'un champ scalaire u définit son Laplacien scalaire i.e $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$)

   Comme $\nabla u \in \left(L^2 (\Omega \diagup K)\right)^N$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$ où n denote la normale, alors $\frac{\partial u}{\partial n}$ admet une trace sur ∂K . En intégrant par parties dans la formulation variationnelle (9), il vient

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} vds \overset{v=\text{cste sur } \partial K}{=} v(\partial K) \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

   Comme la constante $v(\partial K)$, est quelconque, on en déduit que

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Les conditions $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $u = constante$ sur ∂K ont été considérées dans la définition de l'espace E auquel appartient u.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−