Introduction aux logiques de description (DL)

Belabed Amine

Master 1 SIC

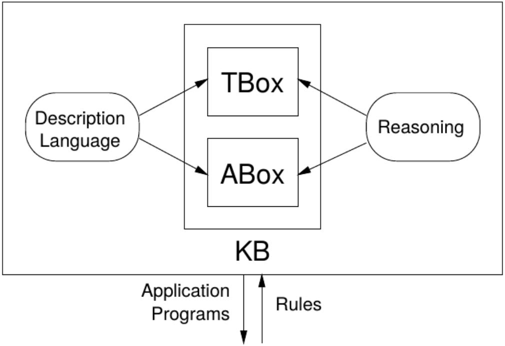
Introduction

- La logique descriptive (LD) : une famille de formalismes mettant l'accent sur le raisonnement, pour représenter une base de connaissances d'un domaine d'application.
- Fragments décidables de FOL.
- Un bon rapport expressivité/performance.
- Permet de représenter : des concepts (classes), des relations (rôles), des objets (Individus).

Niveaux de description

Une base de connaissances (KB) à base de logiques de description

F. Baader, W. Nutt



- TBox (Terminological Box) : définit les concepts(classes) et les rôles(relations).
- ABox (Assertion Box) : décrit les individus en termes de concepts et de relations.

Familles de logiques descriptives

Ensemble de constructeurs pour construire des concepts et des rôles complexes à partir de plus simples.

- La logique la plus simple dans cette famille s'appelle $\mathcal{AL}$ (Attributive Language).
- Exemples de constructions :
  - $\mathcal{C}$:La négation de concepts (complément) $\mathcal{ALC}$.
  - $\mathcal{F}$: Relations fonctionnelles $\mathcal{ALCF}$.
  - $\mathcal{N}$: Restrictions de cardinalité (non qualifié).
  - $\mathcal{H}$:Hiérarchie des rôles.
  - $\mathcal{SHOIN}$ (OWL-DL) : $\mathcal{ALC} + \mathcal{H} + \mathcal{O} + \mathcal{I} + \mathcal{N}$

Familles de logiques descriptives

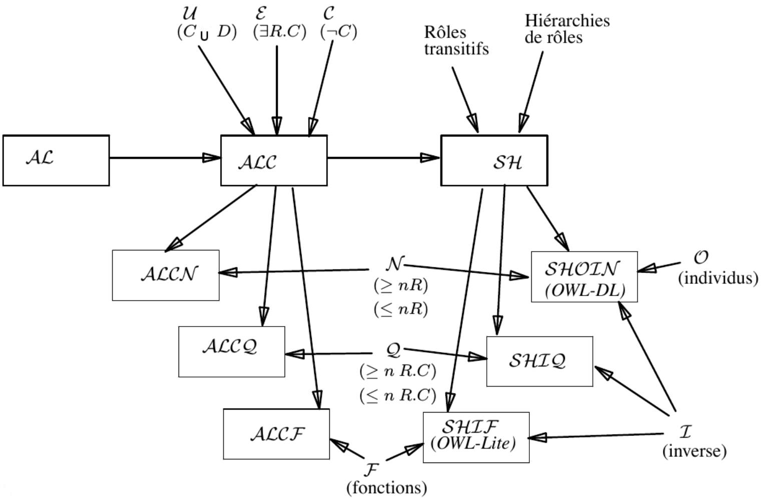


Figure tirée de : Michel Gagnon, *Logique descriptive et OWL*, École polytechnique, Montréal, 2012.

Langage de base $\mathcal{AL}$

Une logique : Syntaxe + sémantique.

- Syntaxe :

A	concept atomique
$\top$	concept universel
$\bot$	concept impossible
$\neg A$	négation atomique
$C \sqcap D$	intersection de concepts
$\forall R.C$	restriction de valeur
$\exists R.\top$	quantification existentielle limitée

- Par convention : A est un concept atomique, et C et D sont des concepts atomiques ou complexes.
- Les définitions : tout énoncé de la forme $(C \sqsubseteq D)$ est appelé définition.

Langage de base $\mathcal{AL}$

Syntaxe.

- Signification des constructeurs avec quantification :
  - $\exists R.C$: les individus qui ont au moins une relation de type R avec un individu de type C.
  - $\forall R.C$:les individus dont toutes les relations de type R se font avec des individus de type C.
- TBox : est un ensemble d'axiomes et définitions de la forme :

$$C \sqsubseteq D \text{ ou } C \equiv D$$

  - Exemples :
    $Animal \sqsubseteq \top, \ Raisonnable \sqsubseteq \top$
    $Humain \sqsubseteq Animal$
    $Humain \equiv Animal \sqcap Raisonnable$
    un père qui n'a que des filles :
    $Humain \sqcap \exists aEnfant.\top \sqcap \forall aEnfant.Femme$
    $Humain \sqcap \forall aEnfant.Femme$ (correcte ? ?)

Langage de base $\mathcal{AL}$

Exemples.

Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :

Langage de base $\mathcal{AL}$

Exemples.

Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :
  - $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$

Exemples.

Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :
    - $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui sont des parents :

Langage de base $\mathcal{AL}$

Exemples.

Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :
  - $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui sont des parents :
  - $PersonneParent \equiv Humain \sqcap \exists aEnfant.\top$

Exemples.

Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :
  - $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui sont des parents :
  - $PersonneParent \equiv Humain \sqcap \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui n'ont pas d'enfants :

Exemples.

Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :
  - $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui sont des parents :
  - $PersonneParent \equiv Humain \sqcap \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui n'ont pas d'enfants :
  - $PersonneSansEnfant \equiv Humain \sqcap \forall aEnfant.\bot$

Exemples.

Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :
  - $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui sont des parents :
  - $PersonneParent \equiv Humain \sqcap \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui n'ont pas d'enfants :
  - $PersonneSansEnfant \equiv Humain \sqcap \forall aEnfant.\bot$
- la classe des personnes qui sont pères :

Exemples.
Avec un TBox : *Humain*,*Femme*, *Homme*, *aEnfant* définissez :

- la classe d'individus qui sont parents :
  - $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui sont des parents :
  - $PersonneParent \equiv Humain \sqcap \exists aEnfant.\top$
- la classe des personnes qui n'ont pas d'enfants :
  - $PersonneSansEnfant \equiv Humain \sqcap \forall aEnfant.\bot$
- la classe des personnes qui sont pères :
  - $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$

Syntaxe.

- ABox : les individus en termes de concepts et de relations. :
  - Exemples :
    $Animal(jerry)$ (jerry :Animal), $Humain(mohammed)$ (mohammed :Humain),$Femme(fatima)$ (fatima :Femme) $aEnfant(mohammed, fatima)$ (mohammed,fatima) :aEnfant, ...

Langage de base $\mathcal{AL}$

Sémantique : interprétation.

Une interprétation $\mathcal{I}$ d'une logique $LD(O, C_c, R_r)$ consiste en :

- Un domaine d'interprétation Δ, ensemble non vide, représentant des entités du monde décrit.
- Une fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ associant :
  - à tout individu $a \in O$, $\mathcal{I}$ associe un élément $\mathcal{I}(a) \in \Delta$
  - à tout concept atomique $A \in C_c$, $\mathcal{I}$ associe un sous-ensemble $\mathcal{I}(A) \subseteq \Delta$
  - à tout rôle atomique $R \in R_r$, $\mathcal{I}$ associe une relation binaire $\mathcal{I}(R) \subseteq \Delta \times \Delta$

Langage de base $\mathcal{AL}$

Sémantique : interprétation.

- les autres interprétations sont définies comme suit :

$\mathcal{I}(\top)$	Δ
$\mathcal{I}(\bot)$	$\emptyset$
$\mathcal{I}(\neg A)$	$\Delta \setminus \mathcal{I}(A)$
$\mathcal{I}(C \sqcap D)$	$\mathcal{I}(C) \sqcap \mathcal{I}(D)$
$\forall R.C$	$\{a \in \Delta \mid \forall b.(a, b) \in \mathcal{I}(R) \rightarrow b \in \mathcal{I}(C)\}$
$\exists R.\top$	$\{a \in \Delta \mid \exists b.(a, b) \in \mathcal{I}(R)\}$

Sémantique : interprétation.

Equivalence de concepts :

- Deux concepts C et D sont équivalents, noté $C \equiv D$, si on a $\mathcal{I}(C) = \mathcal{I}(D)$, quelle que soit l'interprétation $\mathcal{I}$.
  - Exemple :
    $\forall aEnfant.Femme \sqcap \forall aEnfant.Etudaint \equiv \forall aEnfant.(Femme \sqcap Etudiant)$
- Par définition on a les équivalences suivantes :
  - $\neg\top \equiv \bot$
  - $\neg\bot \equiv \top$
  - $C \sqcap \neg C \equiv \bot$

Inclusion de concepts :

- On dit que le concept C inclus le concept D, noté $C \sqsubseteq D$, ssi on a $\mathcal{I}(C) \sqsubseteq \mathcal{I}(D)$, quelle que soit l'interprétation $\mathcal{I}$.
- Par définition, pour tout concept C on a : $C \sqsubseteq \top$.

Sémantique : interprétation.

Eexmple :

- Soit la *BK* suivante :
  -**TBox** : Personne, Male, aEnfant .
- Soit le domaine d'interprétation Δ :
  $\Delta = \{mohammed, amine, ibrahim, fatima, sara, lacy\}$
- Un exemple d'interprétation :
  $\mathcal{I}(Personne) =$
  $\{mohammed, amine, ibrahim, fatima, sara\}$
  $\mathcal{I}(Male) = \{mohammed, amine, ibrahim\}$
  $\mathcal{I}(aEnfant) = \{(mohammed, amine), (mohamed, sara),$
  $(fatima, sara), (amine, ibrahim)\}$
  $\mathcal{I}(\neg Male) = \{fatim, sara, lacy\}$
  $\mathcal{I}(Personne \sqcap \neg Male) = \{fatima, sara\}$
  $\mathcal{I}(\exists aEnfant.\top) = \{mohammed, amine, fatima\}$
  $\mathcal{I}(\forall aEnfant.Male) = \{amine, ibrahim, lacy\}$

Familles de logiques descriptives

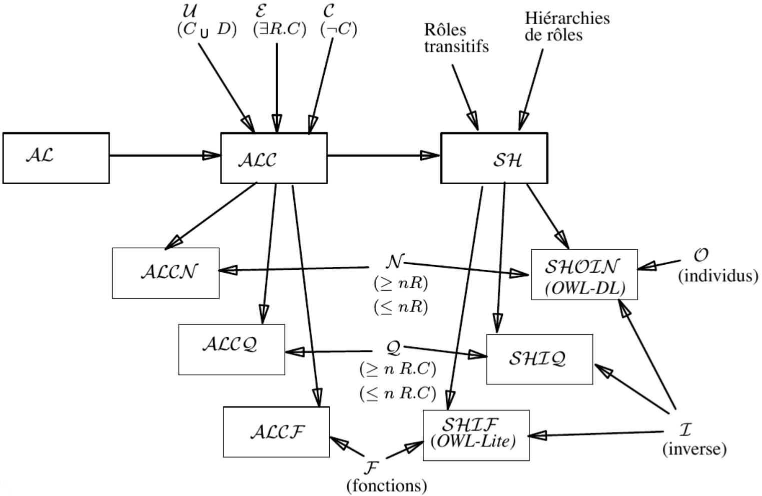


Figure tirée de : Michel Gagnon, *Logique descriptive et OWL*, École polytechnique, Montréal, 2012.

La logique $\mathcal{ALC}$

- $\mathcal{ALC}$:
  - $\mathcal{AL}$;
  - Négation sans restriction ($\mathcal{C}$) ;
  - Quantification existentielle complète ($\mathcal{E}$:$\exists R.C$) ;
  - Constructeur d'union ($\mathcal{U}$).
- Syntaxe

A	concept atomique
$\top$	concept universel
$\bot$	concept impossible
$\neg C$	négation atomique ou composé
$C \sqcap D$	intersection de concepts
$C \sqcup D$	union de concepts
$\forall R.C$	restriction de valeur
$\exists R.C$	quantification existentielle compléte

- La négation sans restriction $(\mathcal{C})$: la négation appliquée à un concept atomique ou composé.
  - **Exemple** : la classe des individus célibataires.

    $$\neg(HommeMariee \sqcup FemmeMariee)$$

  - On peut avoir les constructions suivantes :

    $$\neg(C \sqcap D) \equiv \neg C \sqcup \neg D$$
    $$\neg(C \sqcup D) \equiv \neg C \sqcap \neg D$$
    $$\neg\exists R.A \equiv \forall R.\neg A$$
    $$\neg\forall R.A \equiv \exists R.\neg A$$
    $$\neg\neg C \equiv C$$

La logique $\mathcal{ALC}$

- Quantification existentielle complète $(\mathcal{E})$:$\exists R.C$
- Interprétation :
  $\mathcal{I}(\exists R.C) = \{a \in \Delta | \exists b.(a, b) \in \mathcal{I}(R) \wedge b \in \mathcal{I}(C)\}$
- **Exemple** : la classe des individus dont au moins un enfant est une femme.

$$Parent \sqcap \exists aEnfant.Femme$$

La logique $\mathcal{ALC}$

- Constructeur d'union($\mathcal{U}$) : l'union (ou disjonction) de deux concepts C et D, est l'ensemble des individus membres soit du concept C ou soit du concept D.
- Interprétation :
  $\mathcal{I}(C \sqcup D) = \mathcal{I}(C) \cup \mathcal{I}(D)$
- **Exemple** : un magasin qui ne vend que des chats et des chiens.

$$Magasin \sqcap \forall vend.(Chat \sqcup Chien)$$

Familles de logiques descriptives

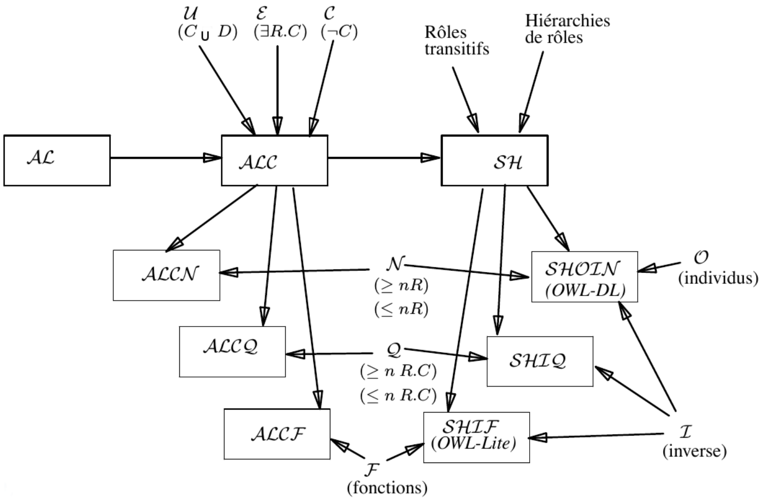


Figure tirée de : Michel Gagnon, *Logique descriptive et OWL*, École polytechnique, Montréal, 2012.

La logique $\mathcal{SH}$

$\mathcal{SH}$: rôles transitifs ($\mathcal{S}$) + Hiérarchies de rôles $\mathcal{H}$

- Rôles transitifs ($\mathcal{S}$) : la possibilité de déclarer dans la TBox qu'un rôle est transitif.
  - **Notation** : $Tr(R)$ signifie que R est une relation transitive
  - **Interprétation** : Si R est déclaré transitif, tout modèle $\mathcal{I}$ doit satisfaire $(x, y) \in \mathcal{I}(R)$ *et* $(y, z) \in \mathcal{I}(R) \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{I}(R)$
  - **Exemple** : « a » est le frère de « b » et « b » est le frère de « c » alors « a » et le frère de « c »
- Hiérarchie de rôles ($\mathcal{H}$) : un ensemble d'axiomes de la forme $R \sqsubseteq S$.
  - **Interprétation** : pour tout axiome $R \sqsubseteq S$ de la hiérarchie on a : $\mathcal{I}(R) \subseteq \mathcal{I}(S)$
  - **Exemple** : $aEnfant \sqsubseteq aDescendant$

Familles de logiques descriptives

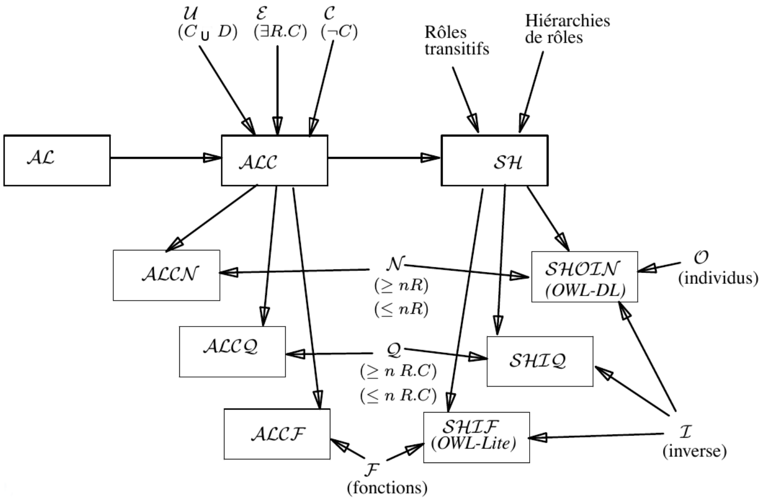


Figure tirée de : Michel Gagnon, *Logique descriptive et OWL*, École polytechnique, Montréal, 2012.

La logique $\mathcal{SHOIN}$

$\mathcal{SHOIN}$: $\mathcal{SH}$+ énumération d'individus ($\mathcal{O}$) + Inversion de rôles ($\mathcal{I}$)+ Restriction de cardinalité ($\mathcal{N}$)

- Enumération d'individus ($\mathcal{O}$) : pour pouvoir désigner des individus dans la TBox (classes énumérées).
  - **Interprétation** : une classe avec les individus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ $\mathcal{I}(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \{\mathcal{I}(a_1), \ldots, \mathcal{I}(a_n)\}$
  - **Exemple** : la classe des départements membres de la faculté des sciences : $MembresFacScience = \{D\_info, D\_chimie, D\_math, D\_physique\}$
- Le constructeur $R : a$: implication du constructeur $\mathcal{O}$, permettant de décrire l'ensemble des individus qui sont reliés à un individu spécifique par une relation R.
  - **Interprétation** : $\mathcal{I}(R : a) = \{d \in \Delta | (d, \mathcal{I}(a)) \in \mathcal{I}(R)\}$
  - **Exemple** : le concept citoyen algérien $CitoyenAlgerien \equiv (LieuNaissance : Algerie) \sqcup (naturalisePar : Algerie)$

La logique $\mathcal{SHOIN}$

$\mathcal{SHOIN}$: $\mathcal{SH}$+ énumération d'individus ($\mathcal{O}$) + Inversion de rôles ($\mathcal{I}$)+ Restriction de cardinalité ($\mathcal{N}$)

- Inversion de rôles ($\mathcal{I}$) : pour définir qu'un rôle est l'inverse d'un autre rôle.
  - **Notation** : $R_2 \equiv R_1^-$
  - **Interprétation** :
    $\mathcal{I}(R^-) = \{(y, x)|(x, y) \in \mathcal{I}(R)\}$
  - **Exemple** : $estRegardePar \equiv regarde^-$
- Restriction de cardinalité ($\mathcal{N}$) : L'ajout de deux constructeurs : $\leqslant n\, R$ et $\geqslant n\, R$
  - **Interprétation** :
    $\mathcal{I}(\geqslant n\, R) = \{a \in \Delta \mid |\{b|(a, b) \in \mathcal{I}(R))\}| \geqslant n\}$
    $\mathcal{I}(\leqslant n\, R) = \{a \in \Delta \mid |\{b|(a, b) \in \mathcal{I}(R))\}| \leqslant n\}$
  - **Exemple** : le concept de père qui a exactement deux enfants
    $Homme \sqcap (\geqslant 2\ aEnfant) \sqcap (\leqslant 2\ aEnfant)$
    Un père qui a exactement deux filles ? ?

La logique $\mathcal{SHOIN}$

$\mathcal{SHOIN}$: $\mathcal{SH}$+ énumération d'individus ($\mathcal{O}$) + Inversion de rôles ($\mathcal{I}$)+ Restriction de cardinalité ($\mathcal{N}$)

- Restriction de cardinalité ($\mathcal{N}$) :
  - **On a les équivalences suivantes** :
    $\geq 1\, R \equiv \exists R.\top$
    $\geq 0\, R \equiv \top$
    $\leq 0\, R \equiv \forall R.\bot$

Raisonnement en DL

Soit une TBox $\mathcal{T}$, il y a 4 propriétés :

- Satisfiabilité : un concept C est satisfiable si et seulement si il existe une interprétation $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$ ($\mathcal{I}$ est un modèle).
- Subsomption : un concept C est subsumé par D ($C \sqsubseteq D$) si et seulement si $\mathcal{I}(C) \subseteq \mathcal{I}(D)$ pour toute interprétation $\mathcal{I}$.
- Équivalence : un concept C est équivalent à un concept D ($C \equiv D$) si et seulement si $\mathcal{I}(C) = \mathcal{I}(D)$ pour toute interprétation $\mathcal{I}$.
- Incompatibilité : deux concepts C et D sont incompatibles si et seulement si $\mathcal{I}(C) \cap \mathcal{I}(D) = \emptyset$ pour toute interprétation $\mathcal{I}$.

Raisonnement en DL

problèmes :

- Satisfiabilité d'une base de connaissance K : est-ce que la ABox et la Tbox sont cohérentes l'une avec l'autre ?
- Satisfiabilité d'un concept : étant donné une base de connaissance K et un concept C existe-t-il au moins un modèle de K pour lequel l'extension de C n'est pas vide ?
- Subsomption : étant donné une base de connaissance K et deux concepts quelconque C et D de K, est-ce que C est subsumé par D ?
- Vérification d'une instance : étant donné une base de connaissance K et une instance « a » d'un concept C, est-ce que « a » est une instance de C dans tout modèle de K ?
- Vérification de rôle : Vérifier par inférence si une assertion $R(a, b)$ est vraie pour tout modèle d'une ABox et d'une TBox

Raisonnement en DL

Réduction à l'insatisfaisabilité :

- Pour deux concepts C et D, on a :
  - C est subsumé par D $\Leftrightarrow$ ($C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable).
  - C et D sont équivalents $\Leftrightarrow$ ($C \sqcap \neg D$ et $\neg C \sqcap D$ sont insatisfaisables).
  - C et D sont disjoints $\Leftrightarrow$ ($C \sqcap D$ est insatisfaisable).

Réductions à la Subsumption :

- Pour deux concepts C et D, on a :
  - C est insatisfiable ssi $C \sqsubseteq \bot$.
  - C et D sont équivalents ssi $C \sqsubseteq D \wedge D \sqsubseteq C$
  - C et D sont disjoints ssi $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$

Inférence par méthode des tableaux : Principe

- Preuve par contradiction (si la négation de l'énoncé est impossible alors l'énoncé est valide).
- La réduction du problème de subsomption au problème de satisfiabilité ($C \sqsubseteq D$ ssi $C \sqcap \neg D$ est non satisfiable).
- Preuve par construction : ajoute de nouveaux énoncés à l'aide des règles d'expansion, en créant ainsi ce qu'on appelle un tableau, qui est en fait un arbre, à cause des branchements qui peuvent y apparaître.

Inférence par méthode des tableaux : Algorithme

1. **Représentation des énoncés en forme normale négative (FNN)** : la négation ($\neg$) apparaît seulement devant les noms de concepts.
2. **Phase d'expansion du tableau** : On applique les règles d'expansion (de décomposition)
   - Certaines règles vont créer de nouvelles branches.
   - Chaque branche est une conjonction.
3. **La fermeture des branches** : une branche est fermée si elle mène à une contradiction.
4. **Arrêt** :
   - Si toutes les branches sont fermées : La négation de l'énoncé est impossible, donc l'énoncé est valide.
   - Si une branche reste ouverte : Donne un exemple de la négation de l'énoncé, donc l'énoncé n'est pas valide.

Règles de tableau pour la logique $\mathcal{ALCN}$

Règle	Condition	Action
règle-$\sqcap$	$\mathcal{A}$ contient $(C_1 \sqcap C_2)(x)$ et ne contient pas déjà les deux énoncés $C_1(x)$ et $C_2(x)$.	On ajoute à $\mathcal{A}$ les énoncés $C_1(x)$ et $C_2(x)$
règle-$\sqcup$	$\mathcal{A}$ contient $(C_1 \sqcup C_2)(x)$ et ne contient aucun des deux énoncés $C_1(x)$ et $C_2(x)$.	On ajoute à $\mathcal{A}$ le branchement suivant : $C_1(x)$ $C_2(x)$
règle-$\exists$	$\mathcal{A}$ contient $(\exists R.C)(x)$ et il n'existe aucun individu z tel que $R(x,z)$ et $C(z)$ sont aussi dans $\mathcal{A}$	On ajoute $R(x,y)$ et $C(y)$ à $\mathcal{A}$, où y est un nom d'individu qui n'existe pas déjà dans $\mathcal{A}$
règle-$\forall$	$\mathcal{A}$ contient $(\forall R.C)(x)$ et $R(x,y)$, mais ne contient pas $C(y)$	On ajoute $C(y)$ à $\mathcal{A}$
règle-$\geq$	$\mathcal{A}$ contient $(\geq n\ R)(x)$ et il n'y a pas dans $\mathcal{A}$ des individus $z_1, \ldots, z_n$ qui sont tous distincts (c'est-à-dire qu'on doit avoir explicitement dans $\mathcal{A}$ l'énoncé $z_i \neq z_j$ pour chaque paire possible avec cet ensemble d'individus) et qui sont tels que $\mathcal{A}$ contient la relation $R(x, z_i)$ pour tous ces individus $(1 \leq i \leq n)$.	Soit un ensemble de n individus dénotés par $y_1, \ldots, y_n$, qui sont des noms qui n'existent pas dans $\mathcal{A}$. On ajoute à $\mathcal{A}$ les énoncés $y_i \neq y_j$ pour chaque paire possible avec cet ensemble, ainsi que les énoncés $R(x, y_i)$ pour $(1 \leq i \leq n)$.
règle-$\leq$	$\mathcal{A}$ contient $(\leq n\ R)(x)$ et les énoncés $R(x,y_1), \ldots, R(x, y_{n+1})$. Il n'existe aucune identité $y_i = y_j$ dans $\mathcal{A}$ pour $(1 \leq i \leq n+1)$, $(1 \leq j \leq n+1), i \neq j$	Pour chaque paire possible (y_i, y_j) d'individus parmi y_i, y_{n+1}, on ajoute une nouvelle branche avec $y_i = y_j$.

Raisonnement en DL

Exemple : Prouvez que

$\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqsubseteq (\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$

Il faut prouvez que :

$\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap \neg(\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$

1. Mettre l'énoncés en FNN :
   $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap (\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite)$
2. On suppose un individu arbitraire "a" comme instance de cette classe :
   $(\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap (\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite))(a)(1)$
3. Application des règles d'expansion :
   3.1 la règle-$\sqcap$ sur (1), on ajoute les énoncés :
   - $(\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite))(a)$ (2).
   - $(\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite)(a)$ (3).

   3.2 À partir de la règle-$\exists$ sur (2) on ajoute :
   - $possede(a, b)$ (4).
   - $(Livre \sqcap Antiquite)(b)$ (5).

Exemple : Prouvez que
$\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqsubseteq (\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$

3. Application des règles d'expansion :
   3.3 la règle-$\sqcap$ sur (5), on ajoute les énoncés :
   - $Livre(b)$ (6).
   - $Antiquite(b)$ (7).

   3.4 la règle-$\sqcup$ sur (3), on ajoute les deux branches :
   - $(\forall possede.\neg Livre)(a)$ (8).
   - $(\forall possede.\neg Antiquite)(a)$ (9).

   3.5 À partir de (8) (la règle-$\forall$) on ajoute :
   - $\neg Livre(b)$: ceci contredit l'énoncé (6) (fermeture du branche (8)).

   3.6 À partir de (9) (la règle-$\forall$) on ajoute :
   - $\neg Antiquite(b)$: ceci contredit l'énoncé (7) (fermeture du branche (9)).

L'énoncé $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqsubseteq (\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$ est prouvé.

Raisonnement en DL

L'arbre du preuve

$(\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap (\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possède.\neg Antiquite))(a)$

$(\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite)(a)$

$(\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possède.\neg Antiquite)(a)$

$possede(a,b)$

$(Livre \sqcap Antiquite)(b)$

$Livre(b)$

$Antiquite(b)$

$(\forall possede.\neg Livre)(a)$	$(\forall possede.\neg Antiquite)(a)$
$\neg Livre(b)$	$\neg Antiquité(b)$
$\square$	$\square$

Relation avec OWL

OWL Constructor	DL	Example
intersectionOf	$C_1 \sqcap \ldots \sqcap C_n$	$Human \sqcap Male$
unionOf	$C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n$	$Doctor \sqcup Lawyer$
complementOf	$\neg C$	$\neg Male$
oneOf	$\{o_1, \ldots, o_n\}$	$\{john, marry\}$
allValuesFrom	$\forall R.C$	$\forall hasChild.Doctor$
someValuesFrom	$\exists R.C$	$\exists hasChild.Lawyer$
value	$\exists R.\{o\}$	$\exists citizenOf.USA$
minCardinality	$\geq n\, R.C$	$\geq 2\, hasChild.Lawyer$
maxCardinality	$\leq n\, R.C$	$\leq 1\, hasChild.Male$
cardinality	$=n\, R.C$	$=1\, hasParent.Female$
...		

Relation avec OWL

OWL Axiom	DL	Example
SubClassOf	$C \sqsubseteq D$	$Human \sqsubseteq Animal \sqcap Biped$
EquivalentClasses	$C_1 \equiv \ldots \equiv C_n$	$Man \equiv Human \sqcap Male$
SubPropertyOf	$R \sqsubseteq S$	$hasDaughter \sqsubseteq hasChild$
EquivalentProperties	$R_1 \equiv \ldots \equiv R_n$	$cost \equiv price$
SameIndividual	$o_1 = \ldots = o_n$	$President\_Bush = G\_W\_Bush$
DisjointClasses	$C \sqsubseteq \neg D$	$Male \sqsubseteq \neg Female$
DifferentIndividuals	$o_i \neq o_j$	$john \neq peter$
inverseOf	$R \equiv S^-$	$hasChild \equiv hasParent^-$
Transitive	$R \circ R \sqsubseteq R$	$ancestor \circ ancestor \sqsubseteq ancestor$
Symmetric	$R = R^-$	$connectedTo \equiv connectedTo^-$
...		

En savoir plus

- Handbook of Knowledge Representation, Chap 3. Edited by F. van Harmelen, V. Lifschitz and B. Porter.
- Basic Description Logics, Franz Baader, Werner Nutt.
- Logique descriptive et OWL, Michel Gagnon.