Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ comme fonction, c'est-à-dire $f(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

1. Montrer, en utilisant la définition, que $\left(D_v f\right)(x) = \dfrac{< x, v >}{\|x\|} \quad , \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   On rappelle que $< x, v >= \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.
2. Que peut-on dire si $x = 0$ et $v \neq 0$?
3. Déterminer ensuite, pour $x \neq 0$, l'expression de $\left[D_w \left(D_v f\right)\right](x)$.

Exercice 2 : Soit $F(x, y) = \sin(xy)$. Calculer toutes les dérivées partielles de F jusqu'à l'ordre 3 inclu.

Exercice 3 : On considère la fonction g définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que g n'est pas continue en $(0, 0)$.
2. Calculer, en utilisant la définition, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.
3. g est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 4 : On considère la fonction p définie par

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que p est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que remarque-t-on ? Donner une explication.

<u>Exercice 5 :</u> On considère l'espace vectoriel réel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles $n \times n$ muni de la norme euclidienne $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^\top A)}$.

1. Montrer d'abord par récurrence que $\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)^2 \leq 2^{m-1} \sum_{j=1}^{m} c_j^2$.
2. En déduire que $\|AB\|_2^2 \leq 2^{n-1}\|A\|_2^2\|B\|_2^2$.
3. On définit à présent la fonction

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longrightarrow & F(X) = X^2 \end{array}$$

   Montrer qu'elle est différentiable.

(Facultatif) Faire la même chose pour la fonction $G(X) = X^{-1}$ définie sur l'ouvert des matrices inversibles.

<u>Exercice 6 :</u> On donne la fonction $f(x, y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$. Déterminer les extremums locaux, puis étudier la nature de chaque extremum.

<u>Exercice 7 :</u> Soit $C_{a,b,R}$ le cercle, dans le plan, d'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ne passant pas par le point $O(0, 0)$. En utilisant la notion d'extremum lié, déterminer le(les) point(s) où la distance de O à $C_{a,b,R}$ est minimale, puis le(les) point(s) où la distance de O à $C_{a,b,R}$ est maximale.

<u>Exercice 8 :</u> Un réservoir d'eau a une forme parallélépipédique. Avec une surface latérale constante, quelle est la forme dont le volume est maximal.

<u>Exercice 9 :</u> Montrer que l'équation $x + y + z + \sin(xyz) = 0$ définit, au voisinage de $(0, 0, 0)$ la variable z comme fonction de x et y. Calculer dans ce cas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

<u>Exercice 10 :</u> On reprend le contexte et les notations de l'exercice 5. Montrer que pour $\alpha > 0$ petit, toute matrice A vérifiant $\|A - I\|_2 < \alpha$ admet une racine carrée.