Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°2

<u>Exercice 1 :</u> On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ comme fonction, c'est-à-dire $f(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

1. Montrer, en utilisant la définition, que $\left(D_v f\right)(x) = \dfrac{< x, v >}{\|x\|} \quad , \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   On rappelle que $< x, v > = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.
2. Que peut-on dire si $x = 0$ et $v \neq 0$?
3. Déterminer ensuite, pour $x \neq 0$, l'expression de $\left[D_w \left(D_v f\right)\right](x)$.

<u>Exercice 2 :</u> Soit $F(x, y) = \sin(xy)$. Calculer toutes les dérivées partielles de F jusqu'à l'ordre 3 inclu.

<u>Exercice 3 :</u> On considère la fonction g définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que g n'est pas continue en $(0, 0)$.
2. Calculer, en utilisant la définition, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.
3. g est-elle différentiable en $(0, 0)$?

<u>Exercice 4 :</u> On considère la fonction p définie par

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que p est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que remarque-t-on ? Donner une explication.

Exercice 5 : On considère l'espace vectoriel réel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles $n \times n$ muni de la norme euclidienne $\|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(A^\top A)}$.

1. Montrer d'abord par récurrence que $\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)^2 \leq 2^{m-1} \sum_{j=1}^{m} c_j^2$.
2. En déduire que $\|AB\|_2^2 \leq 2^{n-1}\|A\|_2^2\|B\|_2^2$.
3. On définit à présent la fonction

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longrightarrow & F(X) = X^2 \end{array}$$

   Montrer qu'elle est différentiable.

(Facultatif) Faire la même chose pour la fonction $G(X) = X^{-1}$ définie sur l'ouvert des matrices inversibles.

Exercice 6 : On donne la fonction $f(x, y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$. Déterminer les extremums locaux, puis étudier la nature de chaque extremum.

Exercice 7 : Soit $C_{a,b,R}$ le cercle, dans le plan, d'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ne passant pas par le point $O(0, 0)$. En utilisant la notion d'extremum lié, déterminer le(les) point(s) où la distance de O à $C_{a,b,R}$ est minimale, puis le(les) point(s) où la distance de O à $C_{a,b,R}$ est maximale.

Exercice 8 : Un réservoir d'eau a une forme parallélépipédique. Avec une surface latérale constante, quelle est la forme dont le volume est maximal.

Exercice 9 : Montrer que l'équation $x + y + z + \sin(xyz) = 0$ définit, au voisinage de $(0, 0, 0)$ la variable z comme fonction de x et y. Calculer dans ce cas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Exercice 10 : On reprend le contexte et les notations de l'exercice 5. Montrer que pour $\alpha > 0$ petit, toute matrice A vérifiant $\|A - I\|_2 < \alpha$ admet une racine carrée.

$2^{\text{ème}}$ année Licence de Mathématiques - 2019/2020.

Module : "Analyse 4" - Semestre 2 - Série de T.D N°2

Corrigé.

Exercice 1 : Soit $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

1°/ D'après la définition, on a :

$$\left(D_v f\right)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+tv_i)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cancel{t}}\left(\frac{2\cancel{t}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) + t^{\cancel{2}}\|v\|^2}{\|x+tv\| + \|x\|}\right)$$

$$= \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i v_i}{2\|x\|} = \frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|}.$$

2°/ Si maintenant $x = 0$ (avec $v \neq 0$), alors $\frac{f(0+tv) - f(0)}{t} = \frac{|t|\,\|v\|}{t}$

D'où : $*$ Si $t > 0$, $\lim_{t\to 0} \frac{|t|\,\|v\|}{t} = \lim_{t\to 0} \|v\| = \|v\|$

$*$ Si $t < 0$, $\lim_{t\to 0} \frac{|t|\,\|v\|}{t} = \lim_{t\to 0} (-\|v\|) = -\|v\|$

Ainsi $\lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t}$ n'existe pas. Donc f n'est pas dérivable en 0, et ce dans le sens de n'importe quel vecteur $\neq 0$.

3°/ On a déjà $\left(D_v f\right)(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|} \Longrightarrow \|x\| \cdot \left(D_v f\right)(x) = \langle x, v\rangle$

D'une part $D_w(\langle x, v\rangle) = \lim_{t\to 0} \frac{\langle x+tw, v\rangle - \langle x, v\rangle}{t} = \langle w, v\rangle$

et d'autre part $D_w\left[\|x\| \cdot \left(D_v f\right)(x)\right] = \left(D_w(\|x\|)\right) \cdot \left(D_v f\right)(x) + \|x\| \cdot D_w\left(D_v f\right)(x)$

mais $D_w(\|x\|) = \frac{\langle x, w\rangle}{\|x\|}$. Ainsi

$$\left(D_w\left(D_v f\right)\right)(x) = \frac{1}{\|x\|}\left[\langle w, v\rangle - \frac{\langle x, w\rangle}{\|x\|} \cdot \frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|}\right]$$

$$\boxed{\left(D_w\left(D_v f\right)\right)(x) = \frac{\langle w, v\rangle}{\|x\|} - \frac{\langle x, w\rangle \cdot \langle x, v\rangle}{\|x\|^3}}$$

Exercice 2 : $F(x,y) = \sin(xy)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cos(xy) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -y^2 \sin(xy) \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -x^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = -y^3\cos(xy) \quad ; \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = -x^3\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} = -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy)$$

Exercice 3 : $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1°/ g n'est pas continue en $(0,0)$: en effet

$$\lim_{x \to 0^+} g(x, \sqrt{x}) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \neq g(0,0).$$

2°/ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(t,0) - g(0,0)}{t} = 0$; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(0,t) - g(0,0)}{t} = 0$

3°/ g n'est pas différentiable en $(0,0)$ car si elle l'était elle serait continue en ce point, or elle n'est pas continue en $(0,0)$. A travers cette exemple, on voit que l'existence des deux dérivées partielles premières, n'implique pas la continuité.

<u>Exercice 4</u> : $$P(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(exemple de Peano)

1°/ P est continue en (0,0) : en effet on a :

$$|P(x,y) - \underset{\overset{\|}{0}}{P(0,0)}| = \frac{|xy|\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|xy|\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy|$$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |P(x,y)| = 0 = P(0,0)$.

2°/ Calcul de $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$: On a $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y(3x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{y[x^4+4y^2x^2-y^4]}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

et $\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{P(t,0)-P(0,0)}{t} = 0$.

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4y^2x^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

De même on aura :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

3°/ $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial P}{\partial y}(0,0)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5}{t^4} - 0}{t} = 1$$

$\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial P}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial P}{\partial x}(0,0)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{t^5}{t^4} - 0}{t} = -1.$$

On remarque que $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}(0,0)$. Ceci contredit le résultat du théorème de Schwarz, c'est-à-dire (par contraposée) que l'hypothèse de ce théorème n'est pas vérifiée; à savoir la continuité de $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$.

Exercice 5 : Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Alors

$$tr(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} (A^T A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (A^T)_{ik} A_{ki} \right)$$

$$\boxed{tr(A^T A) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}^2}$$ (A^T est la transposée de A)

La norme proposée est la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1°/ Appelons $(\mathcal{P}_m)$: $\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)^2 \leq 2^{m-1} \sum_{j=1}^{m} c_j^2$. $m \geq 1$.

* $(\mathcal{P}_1)$: $c_1^2 \leq 2^{1-1} \cdot c_1^2$ évident.

* Supposons que $(\mathcal{P}_m)$ a été démontrée jusqu'à l'ordre m, et montrons que $(\mathcal{P}_{m+1})$ est vraie aussi.

$$\left(\sum_{j=1}^{m+1} c_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} c_j + c_{m+1}\right)^2$$

$$\leq 2\left[\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)^2 + c_{m+1}^2\right] \quad \text{car } (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2). \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\leq 2\left[2^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j^2\right) + c_{m+1}^2\right] \quad \text{par l'hypothèse de récurrence.}$$

$$\leq 2\left[(2^{m-1}-1)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j^2\right) + \sum_{j=1}^{m+1} c_j^2\right]$$

or $\sum_{j=1}^{m} c_j^2 \leq \sum_{j=1}^{m+1} c_j^2$ d'où

$$\left(\sum_{j=1}^{m+1} c_j\right)^2 \leq 2\left[(2^{m-1}-\cancel{1}) \sum_{j=1}^{m+1} c_j^2 + \cancel{\sum_{j=1}^{m+1} c_j^2}\right]$$

$$\leq 2^m \sum_{j=1}^{m+1} c_j^2 \quad \text{(cqfd).}$$

2°/ Montrons que $\|AB\|_2^2 \leq 2^{n-1} \|A\|_2^2 \|B\|_2^2$.

On a $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ d'où $(AB)_{ij}^2 \leq 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 b_{kj}^2$.

et donc $\|AB\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (AB)_{ij}^2 \leq 2^{n-1} \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ik}^2 b_{kj}^2$

Or $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 \leq \|A\|_2^2$ d'où $\|AB\|_2^2 \leq 2^{n-1} \|A\|_2^2 \underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} b_{kj}^2}_{= \|B\|_2^2}$.

3°/ Différentiabilité de $F(X) = X^2$. On a

$$F(X+H) = (X+H)^2 = (X+H)\cdot(X+H)$$
$$= X^2 + XH + HX + H^2 \quad (\text{on } \underline{\text{n'a pas}}\ XH = HX)$$
$$= F(X) + (XH + HX) + H^2.$$

L'application $H \longmapsto XH + HX$ est manifestement linéaire, montrons que c'est la différentielle, i.e $\boxed{dF_X(H) = X\cdot H + H\cdot X.}$

En effet : $F(X+H) - F(X) - dF_X(H) = H^2$

et donc
$$\frac{\|F(X+H) - F(X) - dF_X(H)\|_2}{\|H\|_2} = \frac{\|H^2\|_2}{\|H\|_2}$$
$$\leq \frac{2^{(n-1)/2}\cdot \|H\|_2^2}{\|H\|_2} = 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot \|H\|_2$$

d'où
$$\lim_{\|H\|_2 \to 0} \frac{\|F(X+H) - F(X) - dF_X(H)\|_2}{\|H\|_2} = 0 \quad \text{cqfd.}$$

On peut faire pareil pour $G(X) = X^{-1}$ définie sur l'ouvert des éléments inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarquons que G est continue car les coefficients de X^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de X ; càd $\lim_{\|H\|_2 \to 0} \|G(X+H) - G(X)\|_2 = 0$.

On a : $X\cdot X^{-1} = I_n = (X+H)(X+H)^{-1}$ pour $\|H\|_2$ petite.

$$\Rightarrow (X+H)\left[(X+H)^{-1} - X^{-1}\right] = X\cdot X^{-1} - (\cancel{X}+H)X^{-1} = -HX^{-1}$$

Multiplions à gauche par X^{-1} : $(I + X^{-1}H)\left[\underbrace{(X+H)^{-1}}_{G(X+H)} - \underbrace{X^{-1}}_{G(X)}\right] = -X^{-1}HX^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{G(X+H) - G(X) = -\underbrace{X^{-1}HX^{-1}}_{dG_X(H)} - X^{-1}H\left[G(X+H) - G(X)\right]}$$

$$\|G(X+H) - G(X) - dG_X(H)\|_2 = \|X^{-1}H\left[G(X+H) - G(X)\right]\|_2$$
$$\leq 2^{n-1}\|X^{-1}\|_2\, \|H\|_2\, \|G(X+H) - G(X)\|_2 \quad \text{cqfd.}$$

Exercice 6 : $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

Déterminons d'abord les points critiques. Ce sont les solutions du système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$

$\implies 4(x^3+y^3) = 0 \implies x^3 = (-y)^3$. Comme la fonction (d'une var.) $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors on aura forcément $x = -y$.

En revenant à l'une des équations du système on obtient :

$$x^3 - 2x = 0 \iff x(x^2-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}.$$

Ainsi on a trois points critiques : $\boxed{O(0,0)\ ;\ A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\ ;\ B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})}$

Calculons ensuite la hessienne : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$,

d'où $\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$.

* $\mathrm{Hess}_f(O) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; $\det(\mathrm{Hess}_f(O)) = 16 - 16 = 0$. C'est un point critique <u>dégénéré</u> (pas d'extremum local).

* $\mathrm{Hess}_f(A) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = 400 - 16 = 384 > 0$; $\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_f(A)) = 40 > 0$.

Les valeurs propres sont donc strictement positives, et donc il y a un <u>minimum</u> au point $(A, f(A))$. La valeur de ce minimum est $f(A) = 4 + 4 - 2\cdot(2\sqrt{2})^2 = 8 - 16 = -8$.

* $\mathrm{Hess}_f(B) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, même conclusion.

Exercice 7 : $C_{a,b,R}$: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. $(R\neq 0)$

$C_{a,b,R}$ ne passe pas par O $(0,0)$ si et seulement si : $\boxed{a^2+b^2\neq R^2}$

Soit $M(x,y)\in C_{a,b,R}$; la distance euclidienne de M à O est donnée par $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Travaillons plutôt avec $f(x,y)=d(x,y)^2=x^2+y^2$ (car elle est C^∞).

$d(x,y)$ sera minimum ou maximum ssi $f(x,y)$ est resp. min, max.

* Cherchons les pts où on a $\max\limits_{(x,y)\in C_{a,b,R}} f(x,y)$. (max : liés).

D'après la méthode de Lagrange ; on doit chercher les extremums libres de $G(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\left[(x-a)^2+(y-b)^2-R^2\right]$.

$$= x^2+y^2-\lambda\left[(x-a)^2+(y-b)^2-R^2\right].$$

$\frac{\partial G}{\partial x}=2x-2\lambda(x-a)$; $\frac{\partial G}{\partial y}=2y-2\lambda(y-b)$, $\frac{\partial G}{\partial \lambda}=(x-a)^2+(y-b)^2-R^2$.

on doit résoudre le système $\begin{cases}(1-\lambda)x+\lambda a=0\\(1-\lambda)y+\lambda b=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\end{cases}$

1er cas : $\boxed{\lambda=1}$ alors $a=b=0$, O est le centre du cercle, et donc il y a une infinité de solutions : Tous les points du cercle réalisent le minimum et le maximum de la distance de O à $C_{0,0,R^2}$.

2ème cas : $\boxed{\lambda\neq 1}$ càd $(a,b)\neq(0,0)$. On a $x=\frac{\lambda a}{\lambda-1}$, $y=\frac{\lambda b}{\lambda-1}$

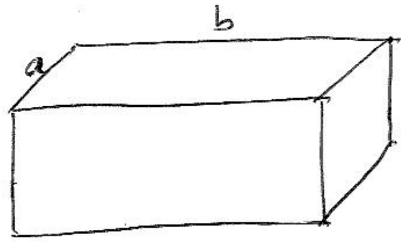
d'où $\frac{a^2}{(\lambda-1)^2}+\frac{b^2}{(\lambda-1)^2}=R^2 \Rightarrow (\lambda-1)^2=\frac{a^2+b^2}{R^2}\Rightarrow \lambda=1\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{R^2}}$.

* Si $\lambda=1+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{R}$, le pt est $A=\left(1+\frac{R}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)(a,b)$: La distance est max et c'est $\|\overrightarrow{OA}\|=R+\sqrt{a^2+b^2}$.

* Si $\lambda=1-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{R}$; Le pt est $B=\left(1-\frac{R}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)(a,b)$: La distance est minimale et c'est $\|\overrightarrow{OB}\|=\left|R-\sqrt{a^2+b^2}\right|$.

Si $\omega(a,b)$ est le centre de $C_{a,b,R}$ alors O,ω,A sont alignés et de même O,ω,B.

Exercice 8 :



$a,b,c > 0$

Le volume est $V(a,b,c) = abc$,

La surface latérale est $S = 2(ab+ac+bc)$. On cherche donc le maximum en volume, à S constante. La méthode de Lagrange donne : chercher les extremums libre de

$$F(a,b,c,\lambda) = abc - \lambda\left[2(ab+ac+bc) - S\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = bc - 2\lambda(b+c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = ac - 2\lambda(a+c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = ab - 2\lambda(a+b) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -2(ab+ac+bc) + S = 0 \end{cases}$$

on aura d'abord

$$\lambda = \frac{bc}{2(b+c)} = \frac{ac}{2(a+c)} = \frac{ab}{2(a+b)}.$$

De l'équation $\dfrac{b\cancel{c}}{\cancel{2}(b+c)} = \dfrac{a\cancel{c}}{\cancel{2}(a+c)} \Rightarrow \cancel{ba} + bc = \cancel{ab} + ac \Rightarrow \boxed{b = a}$

et aussi $\boxed{b = c}$ donc $\boxed{a = b = c = \sqrt{\dfrac{S}{6}}}$

La forme est donc celle d'un <u>cube</u> de côté $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

La méthode de Lagrange ne donne que le (ou les) point critique lié, mais pas sa qualité (maximum ou minimum). Pour s'assurer que c'est réellement un maximum, il faut utiliser la contrainte pour ne garder que des variables libres. Par exemple $\boxed{c = \dfrac{1}{a+b}\left[\dfrac{S}{2} - ab\right]}$

puis remplacer dans $V(a,b,c) = \boxed{\dfrac{ab}{a+b}\left[\dfrac{S}{2} - ab\right] = W(a,b)}$

Il faut montrer que le pt $\left(\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}\right)$ est un maximum pour W.

(Bon Courage pour les calculateurs !!)

Exercice 9 : Soit l'équation $x+y+z+\sin(xyz)=0$. Cet exercice est une simple application du théorème des fonctions implicites. Soit la fonction $F(x,y,z)=x+y+z+\sin(xyz)$. On a : $\frac{\partial F}{\partial z}=1+xy\cos(xyz)$ d'où $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=1\neq 0$ (inversibilité). Donc il existe un voisinage de $(0,0,0)$ petit dans lequel z est une fonction de (x,y) : $z=\varphi(x,y)$. Dans notre cas on n'a que l'existence de $\varphi(x,y)$, mais aucun moyen d'expliciter son expression ! On a $F(x,y,\varphi(x,y))=0$, $(x,y)\in U(0,0)$.

D'où $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{1+y\varphi(x,y)\cos(xy\varphi(x,y))}{1+xy\cos(xy\varphi(x,y))}}$

et $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{1+x\varphi(x,y)\cos(xy\varphi(x,y))}{1+xy\cos(xy\varphi(x,y))}}$

Exercice 10 : Il s'agit de montrer que l'équation $X^2=A$ admet une solution unique (racine carrée de A) si $\|A-I\|_2<\alpha$ (α petit), c.à.d si A est suffisamment proche de la matrice I. Reprenons $F(X)=X^2$ de l'exercice 5. On a $dF_X(H)=XH+HX$ et donc $dF_I(H)=2H$. Ainsi l'application linéaire $dF_I : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, donc d'après le théorème de l'inversion locale on a : il existe un voisinage de I (par exemple la boule $\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \|A-I\|_2<\alpha\}$) dans lequel F est inversible. (cqfd).

On pourrait s'amuser à calculer $\sqrt{A}$ dans le cas $n=2$ et $A=\begin{pmatrix}1+a & b\\ c & 1+d\end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2+c^2+d^2=\rho^2$ (ρ petit).

(Bon courage !).