INTERPOLATIONS DE FONCTIONS

Le problème :

Soit un ensemble de n points : x_0, x_1…x_{n-1} et pour chaque point on connaît la valeur d'une fonction f inconnue : $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$ (les $f(x_i)$ seront aussi notés f_i).

Question : Quelle est la valeur de f sur les points intermédiaires ?

*** Pour cela on doit *supposer* un modèle mathématique de f (polynôme, somme de sinus etc…)**

* On doit aussi savoir si:

1) Les $f(x_i)$ sont-elles des valeurs **exactes ?**

2) Les $f(x_i)$ sont-elles des valeurs **approchées** (ex : pts de mesure) ?

III.1 INTERPOLATION POLYNOMIALE

L'interpolation polynomiale est utilisée dans le cas où les $f(x_i)$ sont des valeurs exactes. Elle consiste à remplacer la fonction $f(x)$ par un polynôme $P(x)$. Pour le déterminer, on présente trois méthodes.

III.1.1 Décomposition polynomiale

Supposons que f est polynomiale.

Avec n points on peut construire un polynôme de degré n-1 :

$$\boldsymbol{f(x) \approx P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i} \tag{3.1}$$

Pour calculer les coefficients a_i , **On a n équations à n inconnues :**

Les inconnues sont les coefficients a_i

Et les n équations sont : $P(x_i) = f_i$ où les f_i sont les valeurs de f aux points x_i

=> Cela peut s'écrire matriciellement :

$$\left.\begin{array}{c} a_0 + a_1 x_0^1 + \cdots + a_{n-1} x_0^{n-1} = f_0 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_{n-1}^1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} = f_{n-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{n équations à n inconnues} \\ \text{les } a_i \text{ sont les inconnues} \\ \text{les } x_i^j \text{ sont les coefficients} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1}^1 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

On résout le système par les méthodes décrites au chapitre 1.

Exemple : Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction f donnée par le tableau :

x_i	0	2	4	6
$f(x_i) = f_i$	0	4	0	4

On a 4 points, le degré du polynôme ≤ 3

En remplaçant les x_i par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La résolution du système donne : $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{20}{3}$, $a_2 = -3$, $a_3 = \frac{1}{3}$

$$f(x) \approx P(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^j = 0 + \frac{20}{3}x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

III.1.2 Polynôme de Lagrange

Pour calculer le polynôme d'interpolation, Lagrange propose la forme suivante :

$$\boldsymbol{P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i(x)} \tag{3.3}$$

$$a_i = f_i \ et \ L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{3.4}$$

Les $L_i(x)$ sont des polynômes de degré n-1 : produits de $(x - x_j)$ pour $j \neq i$.

Pour l'exemple précédent, on a :

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(0-2)(0-4)(0-6)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x-6)}{(2-0)(2-4)(2-6)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-6)}{(4-0)(4-2)(4-6)}, \quad L_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(6-0)(6-2)(6-4)}$$

$$P(x) = 0 \times L_0(x) + 4 \times L_1(x) + 0 \times L_2(x) + 4 \times L_3(x) = \frac{20}{3}x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

III.1.3 Polynôme de Newton

Pour calculer le polynôme d'interpolation, Newton propose la forme suivante :

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

Ce polynôme peut s'écrire sous la forme suivante

$$\boldsymbol{P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)} \tag{3.5}$$

On prend par convention : $\prod_{j=0}^{-1}(x - x_j) = 1$

La quantité $f[x_0, x_1, \dots, x_i]$ s'appelle $i^{ème}$ différence divisée de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_i$:

$f[x_0] = f(x_0)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Soit la forme générale :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0} \tag{3.6}$$

Pour l'exemple précédent :

$x_0 = 0$ $f[x_0] = \mathbf{0}$ $f[x_0, x_1] = \frac{4-0}{2-0} = \mathbf{2}$ $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-2-2}{4-0} = \mathbf{-1}$ $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1-(-1)}{6-0} = \mathbf{\frac{1}{3}}$
$x_1 = 2$ $f[x_1] = 4$ $f[x_1, x_2] = \frac{0-4}{4-2} = -2$ $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2-(-2)}{6-2} = 1$
$x_2 = 4$ $f[x_2] = 0$ $f[x_2, x_3] = \frac{4-0}{6-4} = 2$
$x_3 = 6$ $f[x_3] = 4$

En reportant les valeurs écrites en gras dans le polynôme de Newton, on obtient :

$$P(x) = 0 + 2(x - 0) - 1(x - 0)(x - 2) + \frac{1}{3}(x - 0)(x - 2)(x - 4) = \frac{20}{3}x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Cas des points équidistants

Si les points x_0, $x_1 \dots x_{n-1}$ sont équidistants ($x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_{n-1} - x_{n-2} = h = Cte$), le polynôme de Newton devient :

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^{n-1} f(x_0)}{(n-1)!\,h^{n-1}}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

$$\boldsymbol{P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!\,h^i} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)} \tag{3.7}$$

avec :

$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$

$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)$

C'est-à-dire :

$$\Delta^i f(x_0) = \Delta^{i-1} f(x_1) - \Delta^{i-1} f(x_0) \qquad (3.8)$$

Pour l'exemple précédent, les points x_i sont équidistants ($x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 2$):

$x_0 = 0$	$\Delta^0 f(x_0) = \mathbf{0}$			
		$\Delta^1 f(x_0) = 4 - 0 = \mathbf{4}$		
$x_1 = 2$	$\Delta^0 f(x_1) = 4$		$\Delta^2 f(x_0) = -4 - 4 = \mathbf{-8}$	
		$\Delta^1 f(x_1) = 0 - 4 = -4$		$\Delta^3 f(x_0) = 8 - (-8) = \mathbf{16}$
$x_2 = 4$	$\Delta^0 f(x_2) = 0$		$\Delta^2 f(x_0) = 4 - (-4) = 8$	
		$\Delta^1 f(x_2) = 4 - 0 = 4$		
$x_3 = 6$	$\Delta^0 f(x_3) = 4$			

En reportant les valeurs (écrites en gras) dans le polynôme de Newton, on obtient :

$$P(x) = 0 + \frac{4}{1 \times 2}(x - 0) - \frac{8}{2 \times 2^2}(x - 0)(x - 2) + \frac{16}{6 \times 3^3}(x - 0)(x - 2)(x - 4)$$
$$= \frac{20}{3}x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

III.1.4 Erreurs de l'interpolation

L'interpolation polynomiale sert à remplacer une fonction f (inconnue ou compliquée) par un polynôme, il s'agit donc d'une approximation, et par conséquent il est important d'étudier l'erreur d'une telle approximation.

Soit $[a, b]$ un intervalle qui contient tous les points $x_0, \ldots, x_{n-1}$, si la fonction f est n fois dérivable dans $[a, b]$ alors on peut montrer que :

$$|\boldsymbol{f(x) - P(x)}| \leq \frac{\boldsymbol{M_n}}{\boldsymbol{n!}} \left|\prod_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n-1}} (\boldsymbol{x - x_i})\right| \; avec \; M_n = \underbrace{max}_{x \in [a,b]} \left|f^{(n)}\right| \qquad (3.9)$$

Exemple : Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide du polynôme d'interpolation pour la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ si les points d'interpolation sont : $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$

Réponse :

$$\left|\sqrt{115} - P(115)\right| \leq \frac{M_3}{3!}\left|\prod_{i=0}^{2}(115 - x_i)\right|; \; M_3 = \underbrace{max}_{x \in [100,144]} \left|f^{(3)}\right|$$

$$f(x) = x^{1/2}; \;\; f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}; \; f''(x) = \frac{1}{4}x^{-3/2}; \;\; f^{(3)} = \frac{3}{8}x^{-5/2}$$

Dans $[100, 144]$, $f^{(3)}$ est décroissante, d'où $M_3 = \frac{3}{8}100^{-5/2} = \frac{3}{8}10^{-5}$

$$\left|\sqrt{115} - P(115)\right| \leq \frac{\frac{3}{8}10^{-5}}{6}|(115 - 100)(115 - 120)(115 - 144)| = 0.006$$

III.1.5 Limites de l'interpolation

L'interpolation polynomiale est la base de nombreuses techniques numériques, en particulier les techniques d'intégration approchée. Cependant elle a des limites :

1- théoriques : on n'est pas assuré de la convergence du polynôme d'interpolation vers la fonction interpolée lorsque l'on fait tendre le nombre de points d'interpolation (et donc le degré du polynôme) vers l'infini (Figure 7)

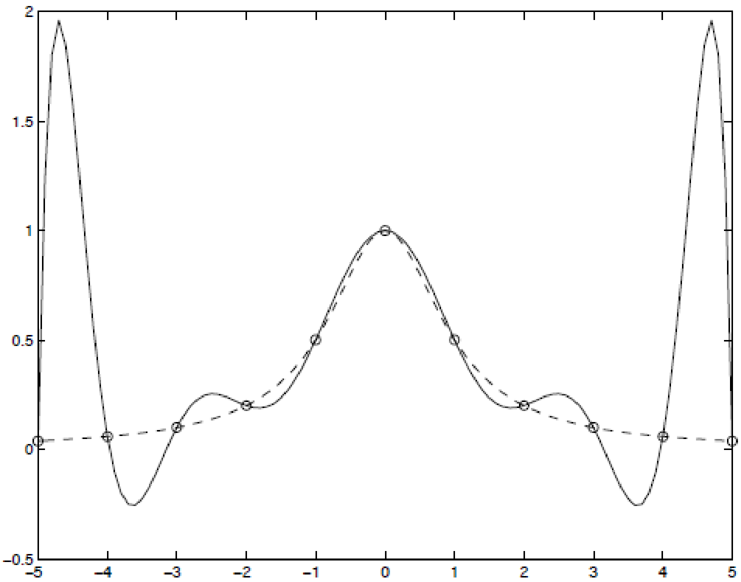

Figure 7 : Divergence de l'interpolation polynomiale pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

En pointillés : la fonction $f(x)$, en traits pleins : le polynôme d'interpolation de degré 10 construit sur 11 points régulièrement espacés