INTERPOLATIONS DE FONCTIONS

Exercice 1

En utilisant la méthode de Newton :

1- Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction *f(x)* donnée par :

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	6	12

2- En déduire une valeur approchée de $f'(1)$.

Solution

$$f(x) \approx P(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!\,h}(x-1) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x-1)(x-2)$$

D'après le tableau ci-dessous : $P(x) = 2 + 4(x-1) + (x-1)(x-2) = x^2 + x$

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
1	2	4	2
2	6	6	
3	12		

$f'(1) \approx P'(1) = 2x + 1|_{x=1} = 3$

Exercice 2

Soit $y(x)$ une fonction donnée par le tableau suivant :

x	0	-1	-2	-3
$y(x)$	1	2	5	10

Déterminer le polynôme d'interpolation de la fonction $y(x)$ à l'aide de la méthode de Newton.

Solution

Les points sont équidistants avec $h = -1$.

$$\begin{array}{|ccccc} x_i & y_i & \Delta y_i & \Delta^2 y_i & \Delta^3 y_i \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & \\ -2 & 5 & 5 & 0 & \\ -3 & 10 & & & \end{array} \qquad P(x) = 1 - x + x(x+1) = x^2 + 1$$

Exercice 3

Soit y(x) une fonction donnée par le tableau suivant :

x_i	0	-1	-2	-3	-4
y_i	1	2	5	10	17

1- A l'aide de la méthode de Newton, calculer le polynôme d'interpolation P(x).

2- (1 pt) En déduire une valeur approché de $y'(-1.5)$.

Solution

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}x(x+1) + \frac{\Delta^3 y_0}{2!\,h^2}x(x+1)(x+2)$$
$$+ \frac{\Delta^4 y_0}{2!\,h^2}x(x+1)(x+1)(x+3)$$

x_i	$\boldsymbol{y_i}$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	**1**	**1**	**2**	**0**	**0**
-1	2	3	2	0	
-2	5	5	2		
-3	10	7			
-4	17				

$y(x) \approx P(x) = 1 - x + x(x+1) = x^2 + 1$

$y'(-1.5) \approx P'(-1.5)$=$2x|_{x=-1.5}$=-3

Exercice 4

Soit le tableau suivant :

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(x_i)$	0	0.5	0.866

En utilisant l'interpolation polynomiale, donner une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Solution

$$f(x) \approx P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}x(x-\pi/6)$$

x_i	$\boldsymbol{y_i}$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	**0**	**0.5**	**-0.134**
$\pi/6$	0.5	0.366	
$\pi/3$	0.866		

$f(x) \approx P(x) = 0.9549x - 0.2444(x - 0.5236)x = -0.2444\, x^2 + 1.0829x$

$f'(x) \approx P'(x) = -0.4888\, x + 1.0829$

$$\sin(\pi/12) \approx P(\pi/12) = 0.2668$$

$$\cos(\pi/5) \approx P'(\pi/5) = 0.9549$$