Faculté des Sciences
Dept Maths
M. Benalili
m_benalili@yahoo.fr

Corrections de la série d'exercices sur le chapitre "Sous-variétés de Rn"

Module de géométrie différentielle (L3)

Exercice1

S_1 est le graphe de la fonction $f_1 : R^2 \to R, (x, y) \mapsto x - 2(x^2 + y^2)$. C'est donc une sous-variété (de dimension 2) de R^3.

S_2 est aussi une sous-variété. C'est le graphe de la fonction $f_2 : R \to R$, $x \mapsto x^2$. C'est une sous-variété de dimension 1 de R^2.

Posons $f_3(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

alors $S_3 = f_3^{-1}(\{0\})$. Alors f_3 est une submersion en chaque point de S_3. En effet, $Df_3 = (2x; 2y, 2z)$, et Df_3 est surjective sauf si $x = y = z = 0$, mais ce point n'est pas un élément de S_3. Ainsi, S_3 est une sous-variété de dimension 2 de R^3

S_4 n'est pas une sous-variété de R^2, car $(0, 0)$ est un point double de S_4

S_5 n'est pas une sous-variété de R^2. Supposons que ce soit une sous-variété de dimension 1. Posons $a = (1, 1) \in S_5$. Il existerait alors V un voisinage de 0 dans R (autrement dit, un intervalle), U un voisinage de a dans R^2 et $f : V \to R^2$ une immersion vérifiant $f(0) = a$ et $f|_V$ est un homéomorphisme de V sur $S_5 \cap U$. En particulier, $f^{-1}|_V$ doit être continue. Ce qui n'est pas vrai , car elle envoie l'ensemble connexe $S_5 \cap U \setminus \{a\}$ sur l'ensemble non connexe $V \setminus \{0\}$.

Supposons maintenant que S_5 soit une sous-variété de dimension 2. Alors, il existerait V un voisinage de 0 dans R^2, U un voisinage de $b = (1, 0)$ dans R^2 et$f : V \to R^2$ une immersion vérifiant $f(0) = b$ et $f|V$ est un homéomorphisme de V sur $S_5 \cap U$. Mais c'est impossible, car V est ouvert alors que $S \cap U$ ne l'est pas.

Donc S_5 n'est pas une sous-variété.

Exercice2

Posons $f(x, y) = x^2 + y^2 - \alpha$, $R^2 \to R$ $C = f^{-1}(\{0\})$. Nous avons $Df(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ si $\alpha \neq 0$.

Et donc f est une submersion et par suite C est une sous-variété de R^2.Si $\alpha = 0$, C est une réunion de 2 droites qui se coupent au point $(0, 0)$. Alors C admet le point $(0, 0)$ comme un point double et par conséquent C n'est pas une sous-variété.

Exercice3

S_1 est une sous-variété de dimension 1 de R^2. En effet considérons la fonction $g :]0, +\infty[\to S1, t \mapsto (t^2, t^3)$. La fonction g est bijective, de classe C^∞, définie sur l'ouvert $]0, +\infty[$ et de plus la différentielle $Dg(t) = (2t, 3t^2)$ est toujours injective puisque c'est une forme linéaire non nulle puisque $t > 0$.

S_2 n'est pas une sous-variété de dimension 1. S_2 admet un point minimum qui est $(0, 0)$. On ne peut donc pas avoir une application $f :]-a, a[\to S_2$ vérifiant $f(0) = (0, 0)$ qui soit injective. Précisément, si $f(a/2) = (t_0^2, t_0^3)$ avec $t_0 > 0$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires,$f(]0,a/2[) \supset \{(t^2,t^3);t \in]0,t_0[\}$. Or si $f(-a/2)=(t_1^2,t_1^3)$avec $t_1>0$, alors on a alors $f(]-a/2,0[) \supset \{(t_2,t_3);t \in]0,t_1[\}$. Les deux ensembles $f(]0,a/2[) et f(]a/2,0[)$ ne peuvent pas être disjoints comme cela devrait être le cas.

S_3 n'est pas non plus une sous-variété. Pour démontrer précisément cela, admettons que S_3 admette un paramétrage par une fonction f de classe C^1 définie dans un voisinage $]-a,a[$ de $0 \in R$, qui réalise une bijection entre $]-a,a[$ et $U \cap S_3$, où U est un voisinage de $(0,0)$ dans R^2, et $Df(0)$ est injective. Écrivons $f=(f_1,f_2)$. Alors, $f_1(x)>0$ si $x \neq 0$ et, $f\prime_1(0)=0$. Mais $f\prime_2(0)=0$ puisqu'on a $f_2 = \pm f_1^{\frac{3}{2}}$. Ainsi, $Df(0)=(0,0)$ ce qui contredit que cette $Df(0)$ est une application est injective.

Exercice4

Soit$a=(a1,a2) \in M1 \times M2$. Il existe un voisinage U_1 de a_1 dans R^n et $f_1 : U_1 \to R^{n-n_1}$ une submersion en a_1 tels que $M_1 \cap U_1 = f_1^{-1}(\{0\})$. De même, il existe un voisinage U_2 de a_2 dans R^m et f_2:$U_2 \to R^{m-m_2}$ une submersion en a_2 tels que $M_2 \cap U2 = f_2^{-1}(\{0\})$.

Posons alors $f=(f_1,f_2) : R^{n+m} \to R^{n+m-n_1-m_2}, (x,y) \in U_1 \times U_2 \mapsto (f_1(x), f_2(y))$. Alors f est bien une submersion en $a=(a_1,a_2)$.

En effet,

$Df\,(a) = (Df_1(a_1), Df_2(a_2))$.

Le rang de cette matrice vaut bien le rang de $Df_1(a_1)$ plus le rang de $Df_2(a_2)$, c'est-à-dire $(n-n_1)+(m-m_2)=(n+m)-(n_1+m_2)$.

De plus, on a également

$f^{-1}(\{0\}) = (M_1 \cap U_1) \times (M_2 \cap U_2) = (M_1 \times M_2) \cap (U_1 \times U_2)$.

Ainsi, $M_1 \times M_2$ est une sous-variété de dimension n_1+m_2.