Introduction à la régularité elliptique

Par Mme Merzagui

April 18, 2020

1 Introduction

Dans ce cours la question posée est "quand est ce qu'une solution faible u de l'edp elliptique

$$Lu = f \text{ dans } \Omega \tag{1}$$

est régulière (une solution calssique)?
Ce cours fait suite aux notions de régularité introduites à la fin du cours précédant. Il aborde la question de régularité des solutions faibles d'e.d.p elliptiques sous forme divergentielle. Les résultats présentés et démontrés sont de deux types: ceux qui donnent la régularité des solutions faibles à l'intérieur du domaine Ω (Régularité intérieure) et ceux qui donnent la régularité de solutions faibles sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ (Régularité sur la frontière).

2 Régularité interieure

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,un ouvert borné et $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible de l'edp (1), où L est l'opérateur elliptique sous forme divergentielle

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(.)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(.)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(.)\,u \tag{2}$$

où $a(.) = (a_{ij}(.))$ est une matrice symetrique uniformèment elliptique c.à.d

$$\exists \alpha > 0; \forall \xi \in \mathbb{R}^N, p.p.sur\Omega, a(x)\xi.\xi \geq \alpha\left|\xi\right|^2. \tag{3}$$

Les hypothèses sur les coeficients $a_{ij}, b_i(.), c$ seront précisées dans les énoncés des théorèmes.

Theorem 1 *()(régularité H^2intérieure) Si*

$$\begin{array}{rcl} a_{ij} & \in & C^1(\Omega);\ b_i, c \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1,...N); \\ f & \in & L^2(\Omega) \end{array} \tag{4}$$

et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de l'edp (1). Alors,

$$u \in H^2_{loc}(\Omega). \tag{5}$$

et pour tout $V \subset\subset \Omega$,*on a l'estimation suivante*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{6}$$

la constante C *dépendant seulement de* V ,Ω *et des coeficients de* L

Remark 2 *:*
(i)*Noter que* $u \in H^1(\Omega)$, *la condition au bord* $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *n'est pas considérée necessairement.*
(ii) *Lorsque* $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, *on a*

$$Lu = f \ p.p \ dans \ \Omega.$$

c.à.d que u vérifie l'edp pour preque tout point de Ω.*En effet, exprimons le fait que u soit solution faible de* (1)

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{B}[u, \varphi] = \langle f; \varphi \rangle$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[u, \varphi] \quad : \quad &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} c(x)\, u(x)\, \varphi(x) dx \end{aligned}$$

puisque $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, *on peut integrer par parties et on obtient*

$$\mathcal{B}[u, \varphi] = \langle Lu; \varphi \rangle$$

par suite $\langle Lu - f; \varphi \rangle = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *donc* $Lu = f$ *p.p.sur* Ω.
(iii)*Dans la démonstration du théorème nous utiliserons l'acroissement* $D^h_k u$ *qui est défini pour* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *localement integrable, par:*

$$\begin{aligned} D^h_k u(x) \quad &: \quad = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}; \\ x \quad &\in \quad V \subset\subset \Omega, \ \text{et } 0 < |h| < dist(V, \partial\Omega) \\ e_k \quad &= \quad k\text{ème vecteur de la base canonique de } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{7}$$

On notera,

$$D^h u = \left(D^h_1 u, ..., D^h_N u \right). \tag{8}$$

On utilisera le résultat suivant (pour plus de détails voir Th3 paragraphe 5.8.2

de la référence([2]).
1) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)\,; 1 \le p < \infty$,*alors pour tout ouvert* $V \subset\subset \Omega$

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(V)} \le Cste \left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega)}$$

pour tout $0 < |h| < \frac{1}{2} dist\,(V, \partial\Omega)$
2) Si $u \in L^p(\Omega)\,; 1 < p < \infty$ *et il existe une constante* C*, tel que, pour tout* $0 < |h| < \frac{1}{2} dist\,(V, \partial\Omega)$

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(V)} \le C$$

alors

$$u \in W^{1,p}(\Omega)\,,\ avec\ \ \|Du\|_{L^p(V)} \le C$$

Proof. (Démonstration du théorème)
1.Soit $V \subset\subset \Omega$,considérons un ouvert $\mathcal{W}$ tel que

$$V \subset\subset \mathcal{W} \subset\subset \Omega,$$

et soit $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que,

$$\begin{cases} \xi \equiv 1 \text{ sur } V \\ \xi \equiv 0 \text{ sur } \Omega/\mathcal{W} \\ 0 \le \xi \le 1 \end{cases}$$

2. Puisque u est une solution faible de (1) on a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \mathcal{B}[u,v] = \langle f; v\rangle.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx = \int_\Omega \bar{f}(x)\, v(x)\, dx \tag{9}$$

où

$$\bar{f} = f - \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - cu \tag{10}$$

3. Maintenant, soit h assez petit $(h \ne 0)$,on choisit $k \in \{1, 0...N\}$ et on considère

$$v = -D_k^{-h}\left(\xi^2 D_k^h u\right) \tag{11}$$

où $D_k^h u$ est définie par (7). En substituant (11) dans (9) on obtient l'expression

$$A = B \tag{12}$$

où

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx \tag{13}$$

et

$$B=\int_{\Omega}\bar{f}\left(x\right)v\left(x\right)dx \tag{14}$$

4.**Estimation de** A,
En utilisant les propriétés suivantes de D_k^h

$$\int_{\Omega}vD_k^{-h}wdx=-\int_{\Omega}wD_k^hvdx \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned} D_k^h\left(vw\right) &= v_hD_k^hw+wD_k^hv \\ \text{avec } v_h\left(x\right) &= v\left(x+he_k\right) \end{aligned} \tag{16}$$

A s'écrit:

$$\begin{aligned} A &= -\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(D_k^{-h}\left(\xi^2D_k^hu\right)\right)dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}D_k^h\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\xi^2D_k^hu\right)dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\left[\left(a_{ij}\right)_h\left(D_k^h\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\left(D_k^ha_{ij}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\xi^2D_k^hu\right) \end{aligned}$$

Et en opérant les caluls A prend la forme suivante,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\left(a_{ij}\right)_h\left(D_k^h\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)D_k^h\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \xi^2dx \\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}[\left(a_{ij}\right)_h\left(D_k^h\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)D_k^hu2\xi\frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\left(D_k^ha_{ij}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\ D_k^h\frac{\partial u}{\partial x_j}\xi^2 \\ &\quad+\left(D_k^ha_{ij}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}D_k^hu2\xi\frac{\partial\xi}{\partial x_j}]dx \\ &= A_1+A_2. \end{aligned} \tag{17}$$

La condition de l'uniforme ellipticité entraine

$$A_1\geq\alpha\int_{\Omega}\xi^2\left|D_k^hDu\right|^2dx \tag{18}$$

De plus de (4) ,on obtient l'existence de $C>0$,tel que

$$\left|A_2\right|\leq C\int_{\Omega}\left[\xi\left|D_k^hDu\right|\ \ \left|D_k^hu\right|+\xi\left|D_k^hDu\right|\ \ \left|Du\right|+\xi\left|D_k^hu\right|\ \ \left|Du\right|\right]dx$$

Par l'inégalité de Chauchy avec ε :

$$"ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}"; (a, b, \varepsilon > 0),$$

on a,

$$|A_2| \leq \varepsilon \int_{\Omega} \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\mathcal{W}} \left|D_k^h u\right|^2 + |Du|^2 \, dx$$

On choisit $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$et on utilise l'inégalité

$$\int_{\mathcal{W}} \left|D_k^h u\right|^2 dx \leq cste \int_{\otimes} |Du|^2 \, dx$$

pour obtenir la majoration suivante

$$|A_2| \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx + Cste \int_{\otimes} |Du|^2 \, dx \tag{19}$$

Maintenant $(19), (18)$ et (17) entrainent,

$$A \geq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx - C \int_{\otimes} |Du|^2 \, dx \tag{20}$$

5.**Estimation de B**.
Utilisant $(10), (11)$ et (14) ,on a

$$|B| \leq C \int_{\Omega} (|f| + |Du| + |u|) \, |v| \, dx \tag{21}$$

Et de la remarque(2) (iii)2), on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{\otimes} |v|^2 \, dx &\leq C \int_{\otimes} \left|D\left(\xi^2 D_k^h u\right)\right|^2 dx \\
&\leq C \int_{\mathcal{W}} \left|D_k^h u\right|^2 + \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx \\
&\leq C \int_{\otimes} |Du|^2 + \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx
\end{aligned}$$

(21)et l'négalité de Cauchy avec ε,impliquent :

$$|B| \leq \varepsilon \int_{\otimes} \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\otimes} f^2 + u^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\otimes} |Du|^2 \, dx$$

et en choisissant $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$, on obtient,

$$|B| \leq \frac{\alpha}{4} \int_{\otimes} \xi^2 \left| D_k^h Du \right|^2 dx + Cste \int_{\otimes} f^2 + u^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\otimes} |Du|^2 dx \tag{22}$$

6. Maintenant en combinant (12) (20) et (22), on obtient pour $k = 1, ...N$,

$$\int_{\mathcal{V}} \left| D_k^h Du \right|^2 dx \leq \int_{\otimes} \xi^2 \left| D_k^h Du \right|^2 dx \leq Cste \int_{\otimes} f^2 + u^2 dx + |Du|^2 dx$$

Et utilisant le (iii)2) de la remarque(2) ,on déduit que $Du \in H^1_{loc}(\Omega)$,avec l'estimation

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq Cste \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right). \tag{23}$$

7. Maintenant on rafine l'estimation(23) en prenant en considération le fait que si $V \subset\subset \mathcal{W} \subset\subset \Omega$,alors le même procédé montre que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\mathcal{W})} + \|u\|_{H^1(\mathcal{W})} \right). \tag{24}$$

où C est une constante dépendant de $V, \mathcal{W}$ et des coeficients de L.
On choisit une nouvelle fonction ξ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{c} \xi \equiv 1 \text{ sur } \mathcal{W} \\ 0 \leq \xi \leq 1 \\ \text{support}(\xi) \subset \Omega \end{array} \right. ,$$

et en posant $v = \xi^2 u$ dans (9) et effectuant les calculs, on obtient

$$\int_{\otimes} \xi^2 |Du|^2 dx \leq Cste \int_{\otimes} f^2 + u^2 dx,$$

par suite,

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{W})} \leq Cste \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{25}$$

De (25) et (24) on arrive à(6) càd

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq Cste \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

■

Theorem 3 *(Régularité interieure d'ordre superieur). Soient $m \in \mathbb{N}^*$,*

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{m+1}(\Omega); \quad (i, j = 1, ...N) \tag{26}$$

$$f \in H^m(\Omega) \tag{27}$$

et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de l'edp (1). Alors,

$$u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega). \tag{28}$$

et pour tout $V \subset\subset \Omega$,on a l'estimation suivante

$$\|u\|_{H^{2+m}(V)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{29}$$

la constante C dépendant seulement de V ,Ω et des coeficients de L.

Proof. (Démonstration du théorème)
On établit (28) et (29) en faisant un raisonnement par récurence sur $m \in \mathbb{N}$,
1. le cas où $m = 0$, a été établit par le théorème précédant.
2. Hypothèse de récurence: supposons que (28) et (29) sont vraies pour $m \in \mathbb{N}^*$ sous les conditions (26) et (27) *et* montrons le résultat pour $m + 1$.
Soient alors

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{m+2}(\Omega)\,; \quad (i, j = 1, ...N) \tag{30}$$

$$f \in H^{m+1}(\Omega) \tag{31}$$

et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de l'edp (1). Alors, utilisant l'hypothèse de récurence on a

$$u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)\,. \tag{32}$$

et pour tout $V \subset\subset \Omega$,on a l'estimation suivante

$$\|u\|_{H^{2+m}(V)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{33}$$

la constante C dépendant seulement de V ,Ω et des coeficients de L.
Fixons un ouvert $\mathcal{W}$ tel que

$$V \subset\subset \mathcal{W} \subset\subset \Omega,$$

3.Soit $\beta \in \mathbb{N}^N$,telque

$$|\beta| = m + 1,$$

et on choisit une fonction test $\breve{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$,on insère

$$v := (-1)^{|\beta|} D^\beta \breve{v}$$

dans l'équation $\mathcal{B}[u, v] = \langle f; v \rangle_{L^2(\Omega)}$, *et* on effectue des integrations par parties pour obtenir,

$$\mathcal{B}[\breve{u}, \breve{v}] = \langle \breve{f}; \breve{v} \rangle \tag{34}$$

où

$$\breve{u} := D^\beta u \in H^1(\mathcal{W}) \tag{35}$$

et

$$\begin{aligned} \breve{f} \quad : \quad &= D^\beta f - \sum_{\substack{\delta \leq \beta \\ \delta \neq \beta}} [C^\delta_\beta \sum_{i,j=1}^N -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(D^{\beta-\delta} a_{ij} D^\delta \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N D^{\beta-\delta} b_i D^\delta \frac{\partial u}{\partial x_j} + D^{\beta-\delta} c D^\delta u] \end{aligned} \tag{36}$$

puisque (34) est vérifiée pour tout $\breve{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$, alors $\breve{u}$ est solution faible de

$$L\breve{u} = \breve{f} \quad \text{dans } \mathcal{W}.$$

De $(30) - (33)$ et (36) ,on a $\breve{f} \in L^2(\mathcal{W})$, avec

$$\left\|\breve{f}\right\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq Cste\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\otimes)}\right). \tag{37}$$

4. Par application du theorème (1) , $\breve{u} \in H^2(V)$ avec l'estimation

$$\begin{aligned} \|\breve{u}\|_{H^2(V)} &\leq cste\left(\left\|\breve{f}\right\|_{L^2(\mathcal{W})} + \|\breve{u}\|_{L^2(\mathcal{W})}\right) \\ &\leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\otimes)}\right) \end{aligned}$$

cette inégalité a lieu pour tout multi-indice β tel que $|\beta| = m+1$, et $\breve{u} = D^\beta u$, par conséquent $u \in H^{m+2}(V)$ *et*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\otimes)}\right)$$

■

Theorem 4

$$\begin{aligned} a_{ij}, b_i, c &\in C^\infty(\Omega)\,; \quad (i,j = 1, ...N) \\ f &\in C^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

et $u \in H^1(\Omega)$ *une solution faible de l'edp (1). Alors,*

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

(Vue qu'aucune donnée sur u *n'est considérée sur* $\partial\Omega$*,le théorème est vrai si* u *ne présente aucune singularité sur* $\partial\Omega$*, qui peut se propager à l'interieur de* Ω*.)*

Proof. (Démonstration du théorème)Par le théorème (3) , $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$,pour tout $m \in \mathbb{N}$; *alors* par le théorème d'injection de Sobolev , $u \in C^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. ■

3 Régularité sur la frontière

Theorem 5 *(régularité* H^2*sur la frontière)*
Si

$$a_{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right); \; b_i, c \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1, ...N), \tag{38}$$

$$f \in L^2(\Omega), \tag{39}$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible du problème aux limites suivant,

$$\begin{cases} Lu = f & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{40}$$

et

$$\partial\Omega \quad est\ C^2 \tag{41}$$

Alors,

$$u \in H^2(\Omega).$$

Et on a l'estimation,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{42}$$

la constante C dépendant seulement de Ω et des coeficients de L.

Remark 6 *Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution de (40) alors l'estimation (42) s'écrit*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq Cste\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

Theorem 7 ***Proof.*** *1. On considère le cas particulier où Ω est :*

$$\Omega = \mathring{B}(0,1) \cap \mathbb{R}_+^N \tag{43}$$

Soient $V = \mathring{B}\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{R}_+^N$ et ξ une fonction test vérifiant

$$\begin{cases} \xi \equiv 1 \ sur\ B\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \xi \equiv 0 \ sur\ \mathbb{R}^N / B(0,1) \\ 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

Donc $\xi \equiv 1 sur\ V$, ξ est nulle près de la frontière de Ω.
2. Puisque u est une solution faible de (1) on a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \mathcal{B}[u,v] = \langle f; v\rangle.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx = \int_{\Omega} \bar{f}(x)\, v(x)\, dx \tag{44}$$

où

$$\bar{f} = f - \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - cu \tag{45}$$

3. Maintenant pour $h > 0$ asez petit , on choisit $k \in \{1, ...N-1\}$ et on considère

$$v = -D_k^{-h}\left(\xi^2 D_k^h u\right)$$

où $D_k^h u$ *est définie par* (7).
De la définition (7), v *s'écrit pour* $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} v(x) &= -D_k^{-h}\left(\xi^2 D_k^h u\right)(x) \\ &= \frac{-1}{h} D_k^{-h}\left(\xi^2(x)\left[u(x+he_k)-u(x)\right]\right) \\ &= \frac{-1}{h^2}\left(\xi^2(x-he_k)\left[u(x)-u(x-he_k)\right]-\xi^2(x)\left[u(x+he_k)-u(x)\right]\right) \end{aligned}$$

En substituant v *dans (44) on obtient l'expression*

$$A = B \tag{46}$$

où

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx \tag{47}$$

et

$$B = \int_{\Omega} \bar{f}(x)\, v(x)\, dx \tag{48}$$

4.Nous allons opérer des estimations sur A *et* B *, similaires à celles faites dans la démonstration du théorème* (1), *on obtient* ,

$$A \geq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx - C \int_{\otimes} |Du|^2\, dx \tag{49}$$

et,

$$|B| \leq \frac{\alpha}{4} \int_{\otimes} \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx + Cste \int_{\otimes} f^2 + u^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\otimes} |Du|^2\, dx \tag{50}$$

En combinant (46), (49) *et* (50) *,pour obtenir pour* $k \in \{1, ...N-1\}$,

$$\int_{V} \xi^2 \left|D_k^h Du\right|^2 dx \leq Cste \int_{\otimes} f^2 + u^2 + |Du|^2\, dx$$

ce qui entraine $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in H^1(\Omega)$ *pour* $k \in \{1, ...N-1\}$, *avec l'estimation suivante*

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l<2N}}^{N} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right\|_{L^2(V)} \leq Cste\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right) \tag{51}$$

5.On doit justifier(51)*en estimant*$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right\|_{L^2(V)}$*.Pour cela rappelant que* $Lu = f$ *p.p sur* Ω *(voir remarque* $(2)\, ii)$*) et que* L *peut s'écrire sous la forme (non divergentielle)*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(.) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{b}_i(.) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(.)\, u = f \tag{52}$$

où $\widetilde{b}_i\,(.) = b_i\,(.) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$, $(i = 1, ...N)$ *.De là,*

$$a_{NN}\,(.)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2N}}^{N} a_{ij}\,(.)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{b}_i\,(.)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,(.)\,u - f \tag{53}$$

Maintenant par l'ellipticité uniforme(3) *en prenant* $\xi = e_N = (0, ..., 0, 1)$ *on obtient pour tout* $x \in \Omega$

$$a_{NN}\,(x) \geq \alpha > 0 \tag{54}$$

Et $(38), (53)$ *et* (54) *impliquent alors,*

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \right| \leq Cste \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2N}}^{N} a_{ij}\,(.) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right| + |Du| + |u| + |f| \right) \tag{55}$$

utilisant (51) *,on obtient alors que* $u \in H^2\,(V)$ *et*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\otimes)} \right) \tag{56}$$

par conséquent

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq Cste \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\otimes)} \right)$$

6. Maintenant on passe au cas général pour Ω*, on choisit un point* $x_0 \in \partial\Omega$ *et sachant que* $\partial\Omega$ *est* C^2*,on peut supposer qu'il existe un certain* $r > 0$*, et une fonction de classe* $C^2, \gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ *tels que*

$$\Omega \cap B\,(x_0, r) = \{x \in B\,(x_0, r)\,; x_N > \gamma\,(x_1, ..., x_{N-1})\}$$

Faisant un changement de variables en posant:

$$\begin{cases} y = \Phi\,(x) \\ x = \Psi\,(y) \end{cases} \tag{57}$$

7. On choisit $s > 0$ *assez petit pour que* $\Omega' = \mathring{B}\,(0, s) \cap \{y_N > 0\}$ *soit dans* $\Phi\,(\Omega \cap B\,(x_0, r))$ *.*
On considère

$$V\prime = \mathring{B}\left(0, \frac{s}{2}\right) \cap \{y_N > 0\} \tag{58}$$

et on définit pour $y \in \Omega'$

$$u'\,(y) = u\,(\Psi\,(y)) \tag{59}$$

Il est simple de voir que

$$u' \in H^1\,(\Omega') \tag{60}$$

et

$$u' = 0 \ \mathit{sur}\ \partial\Omega' \cap \{y_N = 0\} \tag{61}$$

8.On affirme que u'est solution faible de l'edp

$$L'u' = f' \tag{62}$$

où

$$f\prime(y) = f(\Psi(y)) \tag{63}$$

et

$$L'u' := -\sum_{k,l=1}^{N} a'_{kl}(.) \frac{\partial^2 u'}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{k=1}^{N} b'_k(.) \frac{\partial u'}{\partial y_k} + c'(.) u' \tag{64}$$

où pour $k, l = 1, ..., N$ et $y \in \Omega'$

$$a'_{kl}(y) := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\Psi(y)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(\Psi(y)) \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j}(\Psi(y)) \tag{65}$$

$$b'_k(y) := \sum_{i=1}^{N} b_i(\Psi(y)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(\Psi(y)) \tag{66}$$

et

$$c\prime(y) := c(\Psi(y)) \tag{67}$$

Si $v\prime \in H_0^1(\Omega')$ et $\mathcal{B}[.,.]$ la forme bilinéaire associée à $L\prime$,on a

$$\mathcal{B}'[u', v'] := \int_{\Omega'} \left(\sum_{k,l=1}^{N} a'_{kl} \frac{\partial u'}{\partial y_k} \frac{\partial v'}{\partial y_l} dy + \sum_{k=1}^{N} b'_k \frac{\partial u'}{\partial y_k} v' + c' u' v' \right) dy \tag{68}$$

Maintenant en definissant v par

$$v(x) := v'(\Phi(x))$$

Alors utilisant(59), (68) ,$\mathcal{B}'[u', v']$ *s'écrit*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'[u', v'] \quad : \quad &= \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{N} \int_{\Omega'} a'_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} dy \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega'} b'_k \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_k} v' dy + \int_{\Omega'} c' uv dy \end{aligned} \tag{69}$$

Maintenant de (65) ,*on a pour $i, j = 1, ..., N$*

$$\sum_{k,l=1}^{N} a'_{kl} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} = a_{ij}$$

car $D\Phi = (D\Psi)^{-1}$. Et de manière similaire, pour $i = 1, ..., N$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} b'_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} b_p \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_p} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_k} = b_i$$

En portant ces calculs dans (69) *et utilisant* $|\det D\Phi| = 1$,*on arrive à ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'[u', v'] \quad : \quad &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right) dx \\ &= \mathcal{B}[u, v] = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f', v' \rangle_{L^2(\Omega')} \end{aligned}$$

ce qui prouve (62) *.*
9. Vérifions maintenant que L$\prime$ *est uniformément elliptique, en effet pour* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *et* $y \in \Omega'$ *on a de* (65)

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{N} a'_{kl}(y)\, \xi_k \xi_l \quad &= \quad \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\Psi(y)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j} \xi_k \xi_l \\ &= \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \eta_i \eta_j \geq \alpha |\eta|^2 \end{aligned} \tag{70}$$

où $\eta = \xi.D\Phi$; *c.à.d* $\eta_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \xi_k$.*Et puisque* $D\Phi D\Psi = I$, *on a* $\xi = \eta D\Psi$; *et il existe une constante* C *telle que* $|\xi| \leq C|\eta|$ *ce ci implique pour* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *et* $y \in \Omega'$,

$$\sum_{k,l=1}^{N} a'_{kl}(y)\, \xi_k \xi_l \geq \alpha' |\xi|^2 \tag{71}$$

Il faut remarquer que de (65), *les coeficients* a'_{kl} *sont* C^1,*car* Φ , Ψ *sont* C^2*et* a_{ij} *sont* C^1.
10. De 62 et 71, on peut appliquer les étapes 1-5 précédantes, ce qui permet alors d'affirmer que u$\prime \in H^2(V')$ *et on a l'estimation*

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C \left(\|u'\|_{L^2(\Omega')} + \|f'\|_{L^2(\otimes')} \right)$$

par conséquent pour

$$V = \Psi(V'), \tag{72}$$

on a

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\otimes)} \right) \tag{73}$$

Pour conclure, puisque $\partial\Omega$ *est compact, il admet un recouvrement fini* $V_1, ...V_n$ *par des ensemble* V *de type défini au paravant par* (72) *et* (58) *.En sommant les estimations obtenues sur les* V_i *avec l'estimation interieure , on obtient* $u \in H^2(\Omega)$ *et l'inégalité* (42) *.* ■

Theorem 8 *(Régularité sur la frontière d'ordre superieur). Soient* $m \in \mathbb{N}^*$,*et*

$$a_{ij}, b_i, c \quad \in \quad C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right); \quad (i, j = 1, ...N), \tag{74}$$

$$f \quad \in \quad H^m(\Omega), \tag{75}$$

$u \in H^1(\Omega)$ *une solution faible du problème*

$$\begin{cases} Lu = f & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{76}$$

et

$$\partial\Omega \quad est\ C^{2+m} \tag{77}$$

Alors,

$$u \in H^{m+2}(\Omega). \tag{78}$$

et ,on a l'estimation suivante

$$\|u\|_{H^{2+m}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{79}$$

où la constante C *ne dépend que de* m, Ω *et des ceficients de* L.

Remark 9 *Si u est l'unique solution de* (76) *alors l'estimation* (79) *s'écrit*

$$\|u\|_{H^{2+m}(\Omega)} \leq Cste\left(\|f\|_{H^m(\Omega)}\right), \tag{80}$$

Theorem 10 ***Proof.*** *la démonstration se fait par récurence sur m (procédé de démonstration du théorème* (3)) *combinée avec la méthode de démonstration de* (5).
1. On commence par le cas où

$$\Omega = \mathring{B}(0,s) \cap \mathbb{R}^N_+$$

pour $s > 0$.*Fixons* $0 < t < s$ *et* $V = \mathring{B}(0,t) \cap \mathbb{R}^N_+$.
2.La récurence.
- pour $m = 0$ *c'est le théorème* (5),
-supposons que le résultat est vrai pour $m \geq 1$ *c.à.d que* (74) *et* (75) *entrainent* (78) *et* (79).*Et montrons qu'il reste vrai pour* $m+1$.*Soient donc*

$$a_{ij}, b_i, c \quad \in \quad C^{m+2}\left(\overline{\Omega}\right); \ \ (i,j = 1,...N), \tag{81}$$

$$f \quad \in \quad H^{m+1}(\Omega), \tag{82}$$

et u solution faible de $Lu = f$ *sur* Ω, *qui s'annule au sens de trace sur* $\{x_n = 0\}$.*On fixe* $0 < t < r < s$ *et* W=$\mathring{B}(0,r) \cap \mathbb{R}^N_+$.*Par l'hypothèse de récurence*

$$u \in H^{2+m}(\mathrm{W}) \tag{83}$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{H^{2+m}(W)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{84}$$

De plus par la régularité interieure théorème (3) , $u \in H^{3+m}_{loc}$.
3. Soit $\beta \in \mathbb{N}^N$, *un multi-indice avec*

$$|\beta| = m + 1 \tag{85}$$

et

$$\beta_N = 0 \tag{86}$$

Alors

$$\breve{u} := D^{\beta} u \in H^1(\otimes) \tag{87}$$

et $\breve{u}$ *s'annule le long de* $\{x_n = 0\}$ *dans le sens de trace. De plus, comme dans la preuve du théorème* (3) , $\breve{u}$ *est une solution faible de* $L\breve{u} = \tilde{f}$ *dans* Ω *(* $\tilde{f}$ *définie par* (36)).
De $(74), (75), (82)$ *et* (84) *,on a* $\tilde{f} \in L^2(W)$, *avec*

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^2(W)} \leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{88}$$

par conséquent la preuve du théorème (5) *montre que* $\breve{u} \in H^2(V)$ *et vérifie*

$$\begin{aligned} \|\breve{u}\|_{H^2(V)} &\leq Cste\left(\left\|\tilde{f}\right\|_{L^2(W)} + \|\breve{u}\|_{L^2(W)}\right) \\ &\leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

et de (85)-(88), *on déduit*

$$\left\|D^{\beta} u\right\|_{L^2(V)} C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{89}$$

pour tout multi-indice β *tel que* $|\beta| = m + 3$ *et*

$$\beta_N = 0, 1, \text{ ou } 2 \tag{90}$$

4.On doit étendre l'estimation (89) *pour enlever la restriction* (90) *.Pour cela supposons par récurence que*

$$\left\|D^{\beta} u\right\|_{L^2(V)} C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{91}$$

pour tout multi-indice β *tel que* $|\beta| = m+3$ *et pour un certain* $j \in \{2, ..., m+2\}$ *et*

$$\beta_N = 0, 1, ..., j, \tag{92}$$

Soit maintenant $|\beta| = m + 3$

$$\beta_N = j + 1. \tag{93}$$

Ecrivons β *sous la forme*

$$\beta = \gamma + \delta, \text{ telque } \delta = (0, ...0, 2) \text{ et } |\gamma| = m + 1.$$

Puisque $u \in H_{loc}^{m+3}(\Omega)$ *et* $Lu = f$ *dans* Ω, *on a*

$$D^{\gamma}Lu = D^{\gamma}f \ p.p \ dans \ \Omega.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} D^{\gamma}Lu &= a_{NN}D^{\beta}Lu - \\ & \left\{ somme \ de \ termes \ avec \ \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}, k \leq j, \ et \frac{\partial^l u}{\partial x_i^l}, l \leq m+3 \right\} \end{aligned}$$

puisque $a_{NN} \geq \alpha > 0$,*alors utilisant* (91) *et* (92), *on trouve pour* $|\beta| = m+3$ *et* $\beta_N = j+1$

$$\left\| D^{\beta}u \right\|_{L^2(V)} C \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{94}$$

par récurence sur j *on a*

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

cette estimation achève le raisonnement par récurence entammé à l'étape2. de cette démonstration.
5.On a démontré que (74) *et* (75) *impliquent* (**??**) *et* (**??**) *dans le cas où* Ω *est de la forme* (**??**). *Le cas général est déduit en utlisant la même idée développée dans la preuve du théorème* (5). ■

Theorem 11

$$\begin{aligned} a_{ij}, b_i, c &\in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right); \ \ (i,j = 1, ...N) \\ f &\in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) \end{aligned}$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ *une solution faible du problème aux limites*

$$\begin{cases} Lu = f \ \ dans \ \Omega \\ u = 0 \ \ sur \ \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\partial\Omega \ est \ C^{\infty}.$$

Alors,

$$u \in C^{\infty}(\Omega).$$

Proof. *Du théorème* (8), *on a* $u \in H^{m+2}(\Omega)$,*pour tout* $m \in \mathbb{N}$; *alors par application du théorème d'injection de Sobolev,* $u \in C^k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.*newline*
■

Exercice

Soit Ω la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$. On définit sur Ω les fonctions

$$f_\alpha(x) = |x|^\alpha\,; (\alpha \in \mathbb{R})$$

et

$$p(x) = 1 + |x|^2$$

et on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + pu = f_\alpha \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{95}$$

1. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f_\alpha \in \mathrm{L}^2(\Omega)$?
   On considérera désormais que α satisfait cette condition.

2. Écrire la formulation variationnelle du problème (P95), en précisant bien l'espace fonctionnel. Montrez que cette formulation variationnelle admet une unique solution u_α.

3. Montrez que cette solution u_α est solution de l'EDP au sens des distributions sur Ω, et que $u_\alpha \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

References

[1] H. Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[2] L. C. Evans,Partial differential equations, Graduate studies in Mathematics,volume 19, Providence, R.I.: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4974-3, MR 2597943 American Mathematical Society.

[3] J.L. Lions, Lectures on Elliptic Partial Differential Equations, Notes by B. V. Singbal, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1957.

[4] K. J. Witsch, Linear Elliptic Boundary Value Problems of Second Order, Fachbereich 6 | Mathematik und Informatik |der Universitat GH Essen 45117. Essenhttps://www.uni-due.de/maxwell/downloads/witsch-pde.pdf