Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

N. Daoudi-Merzagui

April 13, 2020

Abstract

Certaines propriétés de l'opérateur $-div(a(\cdot)\nabla u)$ sont démontrées et utilisées dans un exercice.

1 Quelques propriétés des opérateurs elliptiques du second ordre

1.1 Propriétés de l'opérateur elliptique sous forme divergentielle

Dans ce qui suit on suppose que Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$et que $a(x) := (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice *symétrique* à éléments dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant la condition de coercivité uniforme

$$\exists\alpha > 0; \forall\xi \in \mathbb{R}^N, p.p.\text{sur } \Omega;\ a(x)\xi.\xi \geq \alpha\left|\xi\right|^2$$

On considère alors l'opérateur elliptique

$$\left\{\begin{array}{c} Au := -div(a(\cdot)\nabla u) \\ D(A) := \left\{u \in H_0^1(\Omega), Au \in L^2(\Omega)\right\} \end{array}\right.$$

On dit alors que D(A) est le domaine de l'opérateur. A est un opérateur elliptique du second ordre sous forme divergentielle.
Le graphe de A est défini par :

$$G(A) := \{(u, Au); u \in D(A)\} \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$Au := -div(a(\cdot)\nabla u) = \sum_{i,j=1}^{N} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

Puisque $1 \leq i,j \leq N, a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$alors $\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ est un élément de $L^2(\Omega)$; lorsque$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, qui n'est défini que comme distribution, est un élément de $L^2(\Omega)$, alors l'opérateur $(A, D(A))$ se trouve bien défini.

1.1.1 Résultat 1

(i) Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe un unique $u \in D(A)$ tel que $u + Au = f$. De plus $(I+A)^{-1}$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même et on a $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$ et $(I+A)^{-1}$ est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.

(ii) L'opérateur $(A, D(A))$ est fermé sur $L^2(\Omega)$.

(iii) $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration du résultat 1

Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, posons

$$a_0(u,v) := \int_{\Omega} u(x)\ v(x)dx + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\cdot\ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)dx$$

$a_0(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$et elle est coercive puisque

$$a_0(u,u) \geq min(1,\alpha)\, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,,$$

par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème variationnel suivant:

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega)\,, \text{telque} \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, a_0(u,v) = \langle f; v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

admet une solution unique qui vérifie$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Or pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a, (en désignant par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$)

$$\langle u + Au, \varphi\rangle = a_0(u,\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx,$$

et par conséquent l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$|\langle u + Au, \varphi\rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

ce qui implique, en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et le théorème de Riesz, que $u + Au$ est dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que

$$u \in D(A) \text{et } u + Au = f.$$

On voit ainsi que $(I+A)^{-1}$ est une injection continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même et que son image est $D(A)$.

———————————————————————

Rappel d'analyse fonctionnelle: Si P est un opérateur linéaire continu et injectif de F dans E, si le domaine d'un opérateur $B : E \to F$, $D(B) = Im(P)$ (image de P), et $B := P^{-1}$, alors $(B, D(B))$ est un opérateur fermé de E dans F.

———————————————————————————————

Maintenant par application de ce rappel , $(I + A, D(A))$ est un opérateur fermé et on en déduit que $(A, D(A))$ est fermé.
Par ailleurs Ω étant borné, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$est compacte (théorème de Rellich-Kondrachov) ; comme par définition on a $D(A) \subset H_0^1(\Omega)$, on en conclut que $(I + A)^{-1}$ est compact de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.

Pour voir que $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il suffit de montrer que $D(A)^\perp = \{0\}$; soit donc $f \in L^2(\Omega)$ tel que pour tout $v \in D(A)$ on ait $\langle f; v\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$. En prenant $u \in D(A)$ tel que $u + Au = f$, alors,

$$0 = \langle f; v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u + Au; v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

c'est à dire que $u = 0$ et $f = 0$. Ce qui montre que $\overline{D(A)} = L^2(\Omega)$.

1.1.2 Résultat 2

$(A, D(A))$ est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$.

Démonstration du résultat 2

D'après le résultat 1, $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on définit l'adjoint de A (noté $(A^*, D(A^*))$) de la façon suivante.

On pose :

$$D(A^*) := \left\{ v \in \left(L^2(\Omega)\right)', \exists C > 0 \text{ t.q.} \forall u \in D(A), \langle v; Au\rangle \leq C \|u\| \right\}.$$

$L^2(\Omega)$ est un espace réflexif et $\left(L^2(\Omega)\right)' := L^2(\Omega)$, l'opérateur $(A, D(A))$ de $L^2(\Omega)$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)'$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$.
Montrons d'abord l'inclusion $A \subset A^*$.
Si $u \in D(A)$, alors pour $v \in D(A)$, alors en opérant une intégration par parties et en utilisant le fait que $a^* = a$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\langle u; Av\rangle_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega u(x) \operatorname{div}(a(x)\nabla v(x))dx \\
&= \int_\Omega \nabla u(x).(a(x)\nabla v(x))dx \\
&= \int_\Omega (a^*(x)\nabla u(x)).\nabla v(x)\, dx \\
&= \int_\Omega (a(x)\nabla u(x)).\nabla v(x)\, dx = \langle Au; v\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

la relation (1) implique que pour tout $v \in D(A)$, on a

$$\left|\langle u; Av\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|Au\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

c'est à dire que u est dans le domaine de A^*. Par ailleurs (1) montre que

$$\langle A^*u; v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u; Av\rangle_{L^2(\Omega)}; \forall v \in D(A)$$

et par densité de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$ on conclut que

$$A^*u = Au.$$

Soit maintenant $w \in D(A^*)$ et posons $f := w + A^*w \in L^2(\Omega)$. D'après le **Résultat 1**, on sait qu'il existe $u \in D(A)$ tel que $u + Au = f$. Or puisque $A \subset A^*$, on a

$$f := w + A^*w = u + Au = u + A^*u,$$

c'est à dire que $(u - w) + A^*(u - v) = 0$.
Soit $\psi \in D(A)$ tel que $\psi + A\psi = u - w$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (u-w) + A^*(u-v); \psi\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle (u-w); \psi + A\psi\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u-w\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et donc $w = u$, c'est à dire que w est dans $D(A)$, ce qui montre que $A = A^*$.

1.2 Solution de l'exercice proposé en cours

Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $s \in \mathbb{R}$, mesurable en $x \in \Omega$.On suppose que $g(x,\cdot)$ est une fonction croissante, p.p. en $x \in \Omega$, et $g(\cdot, 0) = 0$. On considère le problème

$$\begin{cases} Au + g(\cdot, u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

On pose $G(x,s) := \int_0^s g(x,t)\,dt$ et on introduit l'énergie associée au problème (2)

$$E(v) := \int_\Omega \frac{1}{2} a(x)\nabla v(x)\cdot \nabla v(x) + G(x, v(x)) - f(x)v(x)dx \tag{3}$$

Condidérons d'abord le cas où $g(x,s) := |s|^{p-1}s$ avec $p \geq 1$.

1. Vérifier que E est une fonction strictement convexe de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ pourvu que, $q \geq \max\left(1, \frac{2N}{N+2}\right)$, et $f \in L^q(\Omega)$.
Posons

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}a(x)\nabla v(x)\cdot\ \nabla v(x) - f(x)v(x)\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{B}(v;v) - L(v) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(v;v) &= \int_\Omega \frac{1}{2}a(x)\nabla v(x)\cdot\ \nabla v(x)dx \\ L(v) &= \int_\Omega f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

$\boldsymbol{B}(v;v)$ est une forme bilinéaire symétrique car la matice $a\,(.)$ est symétrique (voir (1)) et L est linéaire, alors (par l'exercice2 de la série d'exercices Approche variationnelle), J est de classe C^1 et est strictement convexe sur $H_0^1\,(\Omega)$.

D'autre part, $G(x,s) = \int_0^s g\,(x,t)\,dt = \int_0^s |t|^{p-1}tdt = \frac{|s|^{p+1}}{p+1}$
et $\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(x,s) = \frac{\partial g}{\partial s}(x,s) = p|s|^{p-1} \geq 0\ \forall s \in \mathbb{R} \Longrightarrow G$ est convexe; ce qui implique que la fonctionnelle $F\,(v) := \int_\Omega G(x, v(x))dx$ est convexe de plus
F est de classe C^{1}sur $L^{p+1}\,(\Omega)$ et $F\prime\,(v) = g\,(.,v)$. (voir td sur fonctionnelle définie par une fct de Carathéodory.).
De là, on peut dire que la fonctionnelle E_1définie par

$$E_1\,(v) = J\,(v) + F\,(v)$$

est la somme de deux fonctionnelles de classe C^1 et convexes, elle est donc C^1 et convexe sur $L^{p+1}\,(\Omega) \cap H_0^1\,(\Omega)$.Et

$$E\,(v) = E_1\,(v) - \int_\Omega f\,(x)\,v\,(x)\,dx.$$

Maintenant soit $f \in L^q\,(\Omega)$; $q \geq \max\left(1, \frac{2N}{N+2}\right)$;puisque

$$L^q\,(\Omega) \subset H^{-1}\,(\Omega)$$

($H^{-1}\,(\Omega)$ dual de $H_0^1(\Omega)$), donc $f \in H^{-1}\,(\Omega) + L^{1+\frac{1}{p}}\,(\Omega)$ ($H^{-1}\,(\Omega) + L^{1+\frac{1}{p}}\,(\Omega)$ étant le dual de $H_0^1\,(\Omega) \cap L^{p+1}\,(\Omega)$).
Alors E est C^1 et convexe sur $L^{p+1}\,(\Omega) \cap H_0^1\,(\Omega)$.

2. Par ailleurs en utilisant l'inégalité de Holder (en notant q' le conjugué de q) et l'injection de Sobolev

$$\int_\Omega |f(x)v(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^q(\Omega)}\,\|v\|_{L^{q'}(\Omega)} \leq Cste\,\|f\|_{L^q(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,.$$

On en déduit l'estimation

$$E\,(v) \geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1}dx - Cste\,\|f\|_{L^q(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Cela montre que si $\left(\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v_n\|_{L^{p+1}(\Omega)}\right)$ tend vers l'infini, alors $E(v_n) \to +\infty$. Par conséquent E atteint son minimum sur $L^{p+1}\,(\Omega) \cap H_0^1\,(\Omega)$ en un unique point u, et on a :

$$E\prime(u) = Au + |u|^{p-1}u - f = 0$$

au sens de $\mathcal{D}'\,(\Omega)$.Comme par ailleurs $u = 0$ sur $\partial\Omega$ au sens des traces, on obtient ainsi une solution (faible) de (2) dans le cas particulier où $g(x,s) := |s|^{p-1}s$.

3. Dans le cas général où:
$g : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable en $x \in \Omega$ et continue et croissante en $s \in \mathbb{R}$, telle que $g(\cdot,0) = 0$, et $G(x,s) := \int_0^u g\,(x,t)\,dt$, vérifie pour tout $s \in \mathbb{R}$, $G(\cdot,s) \in L^1_{loc}\,(\Omega)\,.$
$f \in L^q\,(\Omega)$; $q \geq \max\left(1, \frac{2N}{N+2}\right)$.
Si l'on considère l'ensemble K défini par

$$K := \left\{v \in H_0^1\,(\Omega)\,; G(\cdot,v(\cdot)) \in L^1(\Omega)\right\}$$

ce ci permettra de donner une cohérence à la définition de la fonctionnelle d'énergie E (3).
On va montrer que E est strictement convexe sur K et atteint son minimum en $u \in K$:
Comme $s \rightsquigarrow g(x,s)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et $g(x,0) = 0$, la fonction $s \rightsquigarrow G(x,s)$ est convexe et positive : par conséquent K est convexe.et non vide parce que $D(\otimes) \subset K$; de la même façon que dans le cas présédant, il est clair que sur K, l'´energie E est strictement convexe. D'autre part pour voir que E est minorée sur K, en utilisant comme ci-dessus les inégalités de Holder et de Sobolev et le fait que $G(x,s) \geq 0$, il suffit de remarquer que l'on a :

$$\begin{aligned} E\,(v) &\geq \frac{\alpha}{2}\,\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - Cste\,\|f\|_{L^q(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad (4)\\ &\geq \frac{-1}{2\alpha}\,(Cste)^2\,\|f\|^2_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\mu := \inf_{v \in K} E(v)$$

Si $(u_n)_n$ est une suite de K minimisante telle que

$$E(u_n) \leq 1 + \mu, \text{et } E(u_n) \to \mu$$

on déduit de (4) que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe une sous-suite, notée encore $(\mathrm{u}_n)_n$, telle que $\mathrm{u}_n \rightharpoonup \mathrm{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ et converge dans $L^2(\Omega)$ et *p.p.* sur Ω, grace au théorème de Rellich-Kondrachov. Si $M := \sup_{n \geq 1} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$on a ainsi par le lemme de Fatou:

$$\int_\Omega G(x, u(x))dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega G(x, u_n(x))dx \leq 1 + \mu + CsteM \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

ce qui prouve que $u \in K$.
Finalement sachant que les termes quadratique et linéaire intervenant dans E sont convexes et continus sur $H_0^1(\Omega)$, on conclut que

$$E(u) \leq \liminf_{n \to \infty} E(u_n) = \mu$$

c'est à dire que μ est atteint en u.

Remark 1 *On peut montrer que u est solution faible de (2) si $g(x,\cdot)$ vérifie une condition de croissance supplémentaire du type polynomial*

$$\begin{array}{rcl} \forall s & \in & \mathbb{R}, p.p.sur\ \Omega, |g(\cdot, s)| \leq a(\cdot) + bs|s|^{p-1}, \\ avec\ a & \in & L^1(\Omega), b > 0\ et\ 1 \leq p < +\infty \end{array}$$

Noter qu'ici K n'est pas fermé dans $H_0^1(\Omega)$ et que l'on ne montre pas que E est s.c.i. : on montre que K contient la limite de toute suite minimisante, et qu'au point de minimum E est s.c.i. ; on n'a pas besoin d'autre chose pour montrer que E atteint son minimum.