Université de Tlemcen
Faculté SNV & STU
bahidja_sahel@yahoo.fr

ANOVA à un facteur

The analysis of variance one way

Introduction:

Dans le cadre des tests d'hypothèses , nous avons émis des hypothèses concernant la moyenne d'une population puis comparé les moyennes de deux populations.

Maintenant, on va s'intéresser à la comparaison de plusieurs moyennes à partir d'échantillons aléatoires et indépendants prélevés dans chacune des populations avec des variances égales.

Pour cela nous avons recours à la méthode de l'analyse de la variance (ANOVA)

Position du problème :

On veut connaitre l'effet de trois types de fertilisants sur la croissance des arbres d'une plantation

1/principe de l'expérimentation :

- Extraire 3 échantillons (groupes) d'arbres et appliquer chaque fertilisant pour chaque échantillon : comparer ensuite les moyennes de croissance annuelle des arbres

Variable d'intérêt(variable dépendante)

Exemple : croissance annuelle

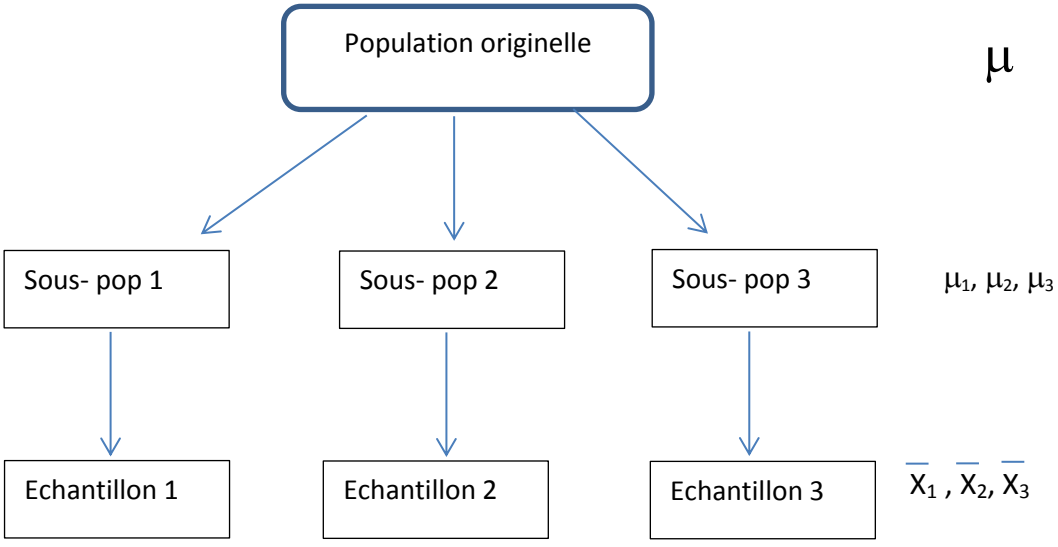
facteur (variable indépendante)

Exemple : type de fertilisant

les domaines d'études sont variés .l 'ANOVA s'applique dès que :

- On veut monter une expérimentation
- On veut vérifier l'effet de variables qualitatives sur une variable quantitative

2/ principe statistique :



bahidja_sahel@yahoo.fr

La problématique de l'ANOVA consiste à utiliser les moyennes observées sur les échantillons pour conclure à des différences significatives sur les moyennes dans les sous-populations.

Objectif de l'ANOVA :

est de tester l'influence d' un facteur ou plusieurs sur une variable dépendante en d'autres termes cette méthode nous mène à voir l'indépendance d'une variable quantitative avec une ou deux ou plus variables qualitatives .

On a alors ANOVA à un facteur ⟶ analyse bivariée

ou ANOVA à deux facteurs et plus ⟶ analyse multivariée

Le but de cette méthode est la comparaison des moyennes k populations à partir d'échantillons aléatoires et indépendants prélevés dans chacune d'elles

Pour ce chapitre , on s'intéresse à l' ANOVA à un facteur

Exemple illustratif :

Ech1	Ech2	Ech3
3	5	5
2	3	6
1	4	7

Les étapes de calcul de la procédure :

1/ on calcule la moyenne pour chaque échantillon (série)

$\bar{X}_1 = (3+2+1)/3 = 2$; $\bar{X}_2 = 4$; $\bar{X}_3 = 6$

2/ on calcule la moyenne générale de l'ensemble des séries :

$\bar{X} = (2+4+6)/3 = 4$

3/ on calcule la variation totale sous forme des carrés des écarts à la moyenne générale :

$SCET = (3-4)^2+(2-4)^2+(1-4)^2+(5-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2$

SCT =30 ⟶ D.D.L = n-1 = 9 -1 =8

4/ on calcule la variation des carrés des écarts à l'intérieur des classes (ou groupes ou modalités) ou variation intra colonne ou résiduelle :

$SCEintra = (3-2)^2+(2-2)^2+((1-2)^2+(5-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2$

SCEintra = 6 ⟶ D.D.L = n –k = 9-3 = 6

5/ on calcule la variation des carrés des écarts entre les classes ou inter colonne ou factorielle :

 bahidja_sahel@yahoo.fr

SCEinter = $(2-4)^2$+ $(2-4)^2$+$(2-4)^2$+$(4-4)^2$+$(4-4)^2$+$(4-4)^2$+$(6-4)^2$+$(6-4)^2$+$(6-4)^2$

SCEinter = 24 ⟶ D.D.L = k-1 = 3-1 =2

On a alors : SCET = SCEintra +SCEinter

30 = 6 + 24

D.D.L 8 = 6 + 2

On utilise ces résultats d' un exemple qui teste l'impact de 3 aliments A1 ; A2 ; A3 sur l'étude d'individus pour cela on va élaborer un test statistique de comparaison de 3 moyennes

Question : H_0 : l'aliment n'a pas d'impact $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1 : l'aliment n'a pas d'impact

La statistique du test : F = $\frac{SCEinter/(k-1)}{SCEintra/(n-k)} = \frac{24/2}{6/6} = 12$

Pour un risque α =10% sur la table de Fischer , on lit F(α , k-1, n-k) = F(0.01 ; 2 ; 6) = 3.46

Or F > F_α donc on rejette H_0

Conclusion : l'alimentation a un impact sur l'étude

Conditions d'application de l'ANOVA :

1/ Indépendance : les k échantillons comparés sont indépendants

2/ Normalité : la variable étudiée X suit une loi normale dans les k populations

3/ Homoscédasticité : les k populations comparées ont la meme variance en d'autres termes le facteur F agit seulement sur la moyenne de la variable X et ne change pas sa variance

Si les variances sont homogènes on peut comparer les moyennes sinon on ne peut comparer des échantillons qui ne varient pas de la meme manière

Pratique de l'analyse de variance :

- Soit une expérience faisant intervenir k échantillons de n_i individus
- Le nombre total d'individus est : n =$\sum_{i=1}^{k} ni$

  Les hypothèses du test statistique :

  H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ ou il y n'a pas d'impact du facteur F sur la variable quantitative X

  H_1 : il existe au moins i,j ; $\mu_i \neq \mu_j$ ou il y a impact du facteur

  Les étapes à suivre pour ce test :

  1/ pour chaque échantillon E_i de taille n_i ,on calcule :

  Moyenne : $\bar{x}_i = \frac{1}{ni} \sum_{j=1}^{ni} x_{ij}$

  Variance : $S_i^2 = \frac{1}{ni-1} \sum_{j=1}^{ni} (xij - \bar{x}i)^2$

 bahidja_sahel@yahoo.fr

2/ pour l'ensemble de l'expérience , on calcule :

Moyenne générale : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{ni} xij = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} ni\ \ x$i

Variance totale : $S^2 = \frac{1}{n-1}\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{ni}(xij - \bar{x})^2$

3/ Calcul de la variance résiduelle (ou variance intra –groupe):

La dispersion des valeurs à l'intérieur des échantillons

$S^2_R = S^2$intra $= \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}(ni-1)S^2$i $= \frac{1}{n-k}$ SCE$_R$

4/ calcul de la variance factorielle (ou variance inter-groupe) :

Dispersion des valeurs d'un échantillon à l'autre (influence du facrteur)

$S^2_F = S^2$inter $= \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} ni(\bar{x}i - \bar{x})^2 = \frac{1}{k-1}$ SCE$_F$

Théorème de l'analyse de la variance:

variation	Somme des carrés des écarts (SCE)	Degré de liberté(d.d.l)	La statistique du test
Factorielle	SCE$_F$ =(k-1) S^2_F	K - 1	$F = \frac{S^2F}{S^2R}$
Résiduelle	SCE$_R$ =(n-k) S^2R	n- k	
totale	SCE$_T$ = (n-1) S^2_T	n- 1	

$$SCE_T = SCE_F + SCE_R$$

Sous l'hypothèse H_0 , la variable F suit une loi de Fischer –Snedecor avec η_1 =k-1 et η_2 = n-k pour d.d.l

Décision :

1/ Si $F > F_\alpha$ alors on rejette H_0 ⟶ on attribue une influence significative au facteur étudié et les moyennes diffèrent significativement

2/ Si $F < F_\alpha$ alors on accepte H_0 ⟶ il n' a pas d'influence du facteur étudié et les moyennes ne diffèrent pas significativement

Remarque :

On ne peut pas remplacer une ANOVA par une série de tests de Student (test t) il y aura une inflation de l'erreur

Quand on rejette H_0 ,pour savoir quelles sont les moyennes significativement différentesplusieurs méthodes associées à l' ANOVA , sont proposées :méthode de Bonferonni , méthode de Tuckey,méthode de Scheffe ;cette dernière est la plus utilisée

Méthode de Scheffe

Elle repose sur le test des contrastes

Définition :

On appelle contraste noté C une somme pondérée de moyennes

$C = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_k\bar{x}_k$

Avec $\sum_{i=1}^{k} ci = 0$ et $\sum_{i=1}^{k} |ci| = 2$

Un contraste permet de comparer une moyenne avec une autre moyenne , un ensemble de moyennes à un autre ensemble de moyennes

Exemple sur le contraste :

On suppose que le test d' ANOVA nous conduit à conclure que 4 moyennes sont différentes dans l'ensemble

- → pour comparer m1 avec m2 on pose : $c_1=1$;$c_2=-1$;$c_3=0$ et $c_4=0$puis on teste si le contraste $C=m_1-m_2$ est différent de 0
- → pour comparer $m_1$et m_2 avec $m_3$et m_4 et on pose :$c_1=1/2$;$c_2=1/2$;$c_3=-1/2$;$c_4=-1/2$et on teste $C=((m_1+m_2)/2) – ((m_3+m_4)/2)$

Test de Scheffe :

- → Si $|C| > \sqrt{(k-1)FsS^2r\sum_{i=1}^{k}\frac{ci^2}{ni}}$ alors le contraste est significativement différent de 0

Avec k :le nombre d'échantillons

Fs : la valeur tabulée de Ficsher avec k-1(colonne) et n-k (ligne) d.d.l pour un risque α

ni : la taille de l'échantillonEi

S^2r : la variance résiduelle ou intra-colonne

- → Sinon le contraste n'est pas significativement différent de 0

Exemple:

On veut comparer trois traitements A, B ,Cchez des sujets atteints d' une certaine forme de leucémie. Pour cela , on constitue un tirage au sort de 3 groupesde leucémiques qu'on traite chacun par l'un des 3 traitements.On obtient les résultats suivants(avec X représente la durée de rémissionexprimée en mois)

traitement	A	B	C
Taille ni	86	242	142
∑x	1161	2904	1750
∑x²	16100	36500	22340

Comparer les 3 traitements

Solution :il s'agit de comparer les durées moyennes de rémission des 3 traitements

On suppose que la condition de normalité des durées de rémission est vérifiée et la condition d'égalité des variances est satisfaite

- Moyennes et variances pour chaque traitement :

traitementA : $\bar{x}_1$ = 1161/86 =13.5 S^2_1=1/86 ($\sum x^2_{I1}$)- $\overline{x^2}_1$ =(16100/86) – 13.5²=4.95

traitement B: $\bar{x}_2$ =2904/242 =12 S^2_2= 1/242($\sum x^2_{I2}$) -$\overline{x^2}_2$ =(36500/242)-12²=6.82

traitement C: $\bar{x}_3$ = 1750/142=12.32 S^2_3= 1/142($\sum x^2_{I3}$) -$\overline{x^2}_3$= (22340/142)-12.32²=5.54

- Variance inter-colonne (factorielle):

S^2F= (1/k-1)$\sum_{i=1}^{k} ni(xi - \overline{x})^2$= 71.65

- Variance intra-colonne (résiduelle):

S^2R= (1/n-k)$\sum_{i=1}^{k} nisi^2$=6.13

- Tableau d'analyse de la variance à un facteur

Source de variation	SCE	D.D.L	Carrés moyens
Intergroupe(factorielle)	SCE_F =143.30	k-1=3-1=2	S^2_F= 71.65
Intragroupe(résiduelle)	SCE_R= 2862.82	n-k= 470-3=467	S^2_R = 6.13
totale	SCE_T =3006.2	n=470	

- Test de Fischer :

H_0 :les 3 traitements ont la même efficacité

H_1 : les 3 traitements n'ont pas la même efficacité

F= S^2_F/S^2_R =71.65/6.13 = 11.69

La table de Fischer donne : $F_{2\ ;467\ ;5\%}$ = 3=F_α

Comme F > alors on rejette H_0

Du fait que les moyennes diffèrent significativement dans l'ensemble , on va comparer les moyennes 2à2 par le test de Scheffe

- On range les traitements par ordre croissant

 bahidja_sahel@yahoo.fr

	B	C	A
Moy	12	12.32	13.5

On veut comparer la moyenne 2 avec la moyenne 3 et la moyenne 3 avec la moyenne 1 on construit les contrastes :

B vs C : $c_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3$ -0.32 ; (c_1=0 ; c_2=1 ; c_3=-1)

C vs A : $c_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_3$ = -1.18 ; (c_1=1 ; c_2=0 ; c_3=-1)

Test de Scheffe B vs C

$C_{critique} = \sqrt{(k-1)Fs\ S^2r\ \sum_{i=1}^{3} ci^2/ni}$ = 0.64

$|C_1| <$ 0.64 alors le contraste C_1 n'est pas significativement différent de 0, on conclut que les moyennes $\bar{x}_2$ et $\bar{x}_3$ ne sont pas différentes.

C vs A : $C_{critique} = \sqrt{(k-1)Fs\ S^2r\ \sum_{i=1}^{3} ci^2/ni}$ = 0.83

$|C_2| >$ 0.83 alors le contraste C_2 est significativement différent de 0, on conclut que les moyennes $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_3$ sont différentes.

Conclusion :

Les traitements B et C ont la même efficacité et le traitement A est plus efficace que les traitements B et C .