Chapitre VI : Résolution des équations différentielles ordinaires (Problème de la Condition initiale ou) de Cauchy

1/ Introduction Générale

soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $f : [t_0 ; t_0+T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si f est continue et s'il existe une constante L strictement positive telle que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$ et tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ on ait :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$ alors, le problème de Cauchy (1) admet une solution unique, quelque soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

On dit alors que f est L-lipschitzienne, où L est la constante de Lipschitz.

Remarque : Nous nous placerons toujours dans les conditions de Lipschitz présentées ci-dessus.

Dans le traitement des équations différentielles, on distingue les méthodes à pas séparés (ou à un seul pas) qui permettent de calculer y_{n+1} à partir de la seule connaissance de y_n et les méthodes à pas liés (ou à pas multiples) qui nécessitent la connaissance de $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-p}$ pour calculer y_{n+1}.

Pour ce cours, nous allons évoqué certaines méthodes numériques à un pas.

2/ Méthodes Numériques à un pas

Les méthodes à un pas sont les méthodes de résolution numériques qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi(t_n, y_n, h_n) \quad \text{avec } 0 \leq n \leq N.$$

où $\varphi : [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction que l'on supposera continue.

Dans la pratique, la fonction $\varphi(t_n, y_n, h_n)$ peut n'être définie que sur une partie de la forme $[t_0, t_0+T] \times J \times [0, \delta]$.
où J : est un intervalle de $\mathbb{R}$. (de sorte en particulier que $[t_0, t_0+T] \times J$ soit contenu dans le domaine de définition de l'équation différentielle).

Dans toutes les méthodes numériques développées par la suite, on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en N intervalles de longueur

$$h = \frac{(t_0+T) - t_0}{N} = \frac{T}{N}.$$ limités par les points $t_n = t_0 + nh$, $0 \leq n \leq N$.

2.1/ Méthode d'Euler

En t_0 on connait y_0, donc aussi $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$. Si $y(t)$ est la solution exacte de (1). $y(t)$ est approchée sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ par sa tangente en t_0. Et ainsi, on a

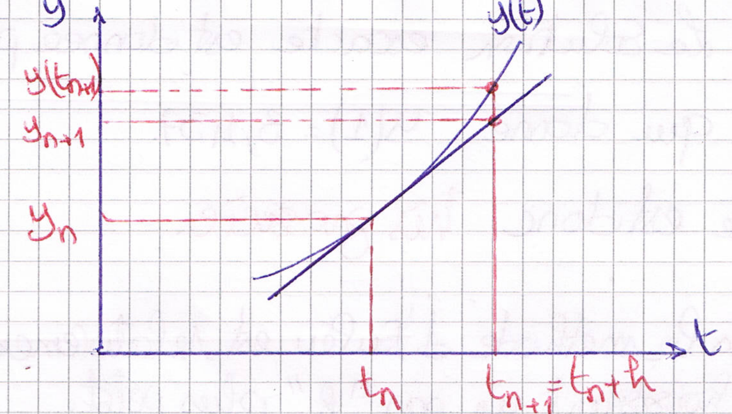
$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$$

Sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, $y(t)$ sera remplacée par la tangente au point (t_1, y_1) on trouve :

$$y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1)$$

Ceci conduit à l'algorithme d'Euler :

$$\boxed{\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}}$$



Précision de la méthode d'Euler :

La méthode d'Euler est une méthode du premier Ordre, c'est à dire que l'erreur au point t_n s'exprime par l'inégalité :

$$|y_n - y(t_n)| \leq k h .$$

où y_n : La valeur approchée définie par l'algorithme d'Euler

$y(t_n)$: La valeur exacte de la solution du problème de Cauchy au pt $t = t_n = t_0 + nh$

k : une cste indépendante de n et de h.

Exemple

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On cherche à approcher, à 10^{-3} la solution du problème posé en $t = 1$ à l'aide de la méthode d'euler, en subdivisant l'intervalle $[0, 1]$ en 10 parties égales.

selon l'algorithme d'Euler :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\,(y_n + t_n) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \leq n \leq 9 \quad \text{et} \quad h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_n	1	1,1	1,22	1,362	1,5282	1,7210	1,9431	2,1974	2,4871	2,8158	3,187

On trouve $y(1) = 3,187$. La solution exacte est donnée par

$y(t) = 2e^{t} - t - 1$ ce qui donne $y(1) = 3,437$.

L'approximation calculée est donc très grossière.

Remarque : L'erreur dans la méthode d'Euler est relativement importante. Elle peut être améliorée, en choisissant un pas "h" plus petit. Mais ceci augmente considérablement le volume de calculs à effectuer.

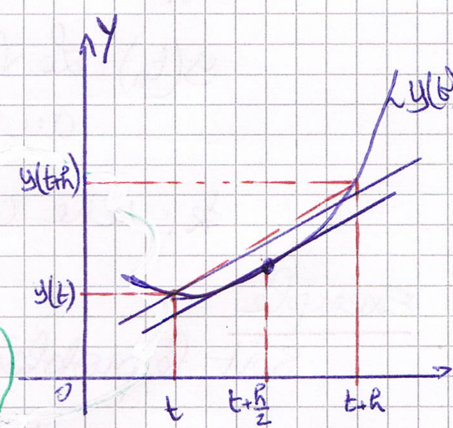
2.2/ Méthode d'Euler améliorée (Méthode du point milieu)

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler, la pente de la tangente en (t_n, y_n) par la valeur corrigée au milieu de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$

Son algorithme est :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y^*_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, y^*_{n+1/2}\right) \end{cases}$$

$0 \leq n \leq N-1$



2.3/ Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Il existe deux méthodes de Runge-Kutta, une d'ordre 2 et une autre d'ordre 4. Cette dernière est la plus utilisée. Son algorithme est donné par :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h & 0 \leq n \leq N-1 \\ P_{n,1} = f(t_n, y_n) & y_0 \text{ donné} \\ P_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} P_{n,1}\right) \\ P_{n,3} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} P_{n,2}\right) \\ P_{n,4} = f(t_{n+1}, y_n + h P_{n,3}) \\ y_{n+1} = y_0 + \frac{h}{6}\left(P_{n,1} + 2P_{n,2} + 2P_{n,3} + P_{n,4}\right) \end{cases}$$

Ainsi la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 consiste à évaluer les valeurs intermédiaires $P_{n,1}$, $P_{n,2}$, $P_{n,3}$ et $P_{n,4}$ et à faire la moyenne pondérée.

Précision de la méthode de Runge-Kutta

$$|y_n - y(t_n)| \leq k h^4$$

où k est une constante qui ne dépend pas du pas "h"

Exemple

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2t}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On désire approcher, en effectuant le calcul avec (06) décimales, la solution du problème posé en $t = 0,2$ à l'aide des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4.

La solution exacte étant $y = \sqrt{2x+1}$, on estimera alors les résultats obtenus.

On considère donc l'intervalle $[t_0, t_1]$ avec $t_0 = 0$ et $t_1 = t_0 + h = 0,2$ et $h = 0,2$.

De l'algorithme de Runge-Kutta, on a :

$$\begin{cases} t_1 = t_0 + h = 0,2 \\ P_{0,1} = f(t_0, y_0) = f(0,1) = 1 \\ P_{0,2} = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot P_{0,1}\right) = f(0,1 , 1,1) = 0,918182 \\ P_{0,3} = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot P_{0,2}\right) = f(0,1 , 1,091818) = 0,908637 \\ P_{0,4} = f(t_1, y_0 + h P_{0,3}) = f(0,2 , 1,181728) = 0,843240 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(P_{0,1} + 2(P_{0,2} + P_{0,3}) + P_{0,4}\right) = 1,183229 \end{cases}$$

ainsi $y(0,2) = y_1 = 1,183229$

valeur exacte $y(0,2) = \sqrt{2(0,2)+1} = 1,183216$

L'erreur commise est

$$|y(0,2) - y_1| = |1,183216 - 1,183229| = 0,000013$$