Travaux Dirigés N°4 : Interpolation Polynomiale

Exercice 1

On dispose d'un ensemble de « n » points (i = 0, …, n) tel que si $i \neq j$, $x_i \neq x_j$

L'interpolation polynomiale sous forme Lagrangienne notée P(x) est une combinaison linéaire

$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i(x)$, $a_i = f_i$, $L_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Les polynômes de Lagrange sont de degré n-1 donc P(x) est au maximum de degré n-1.

- Montrer que $P(x_k) = a_k$ pour $i = 0, \ldots, n-1$

Exercice 2

1/ Déterminer le polynôme de Lagrange qui passe par les points donnés par le tableau ci-après :

xi	0	2	4	6
f(xi)=fi	0	4	0	4

2/ Comparer le polynôme trouvé avec celui de Newton

Exercice 3

1/ Déterminer le polynôme de Newton de degré 3 qui passe par les points suivants :

Points	x	y
1	1	0
2	1,5	1
3	2	2
4	2,5	-1,5

2/ Même question pour le tableau suivant :

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x_i)$	1,4	1,56	1,76	2,00	2,28

Exercice 4

Déterminer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = |x|$ dont on connait les valeurs aux abscisses dans la base de Lagrange et de Newton.

xi	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Exercice 5 ***(Approximation par les moindres carrées)***

Considérons les points suivants (-1 , -1,5), (-0,5 , 0), (0 , 0,25) (0,5 , 0) et (1 , 0). Trouvez le polynôme de degré 2 le plus proche de ces points.