Travaux Dirigés N 1 :
Les méthodes de résolution directes des systèmes d'équations linéaires

Exercice 1

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Exercice 2

En utilisant la stratégie du pivot total, résoudre le système suivant avec la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}$$

Exercice 3

Soient les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} (S_1) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ -2x_1 + 13x_2 - 11x_3 = -9 \\ 4x_1 - 11x_2 + 21x_3 = -31 \end{cases} (S_2)$$

1/ Résoudre le système *(S1)* par la méthode de Factorisation.

2/ Résoudre le système *(S2)* par la méthode de Cholesky.

Exercice 4

Soit le système linéaire en dimension 3 : $A.X = B$ où α et β sont deux réels et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1/ Donner la décomposition LU de A.

2/ Pour quelle valeur de α cette décomposition existe ?

3/ Pour quelles valeurs de α et β, ce système admet une solution unique ? Donner cette solution.

Rappels

Méthode de Gauss	Factorisation LU	Cholesky
$\begin{cases} a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} a_{kj}^k \\ b_i^{k+1} = b_i^k - \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} b_k^k \end{cases}_{i,j=k+1..n}$	$\begin{cases} L_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}\right)}{U_{jj}} \; _{,i>j} \\ U_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}\right) _{,i\leq j} \end{cases}$	${L_{jj}}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} {L_{jk}}^2$ $L_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk}\right)}{L_{jj}} \; _{,j+1\leq i\leq n}$