Exercice 2 énoncés et corrections

Exercice 2

Soit une OEM plane qui se propage dans le vide et dont le champ électrique s'écrit de la forme :

$$\boldsymbol{E_1} = E_0\,\boldsymbol{u_z}\,\exp\,-(\omega t + kx)$$

1. Spécifier les caractéristiques du champ de l'OEM.
2. Calculer le champ magnétique B_1 associé à E_1.
3. Rappeler la propriété de transversalité et montrer qu'elle est vérifiée.
4. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ magnétique B_1.
5. L'onde EM est-elle dispersive ?, si oui, préciser la condition.
6. Ecrire les expressions vérifiées par les énergies électrique et magnétique de l'onde.

Réponses

L'onde se propage dans le vide dont le champ électrique est :

$$\boldsymbol{E_1} = E_0\,\boldsymbol{u_z}\,\exp\,-i(\omega t + kx)$$

Je m'excuse d'avoir oublié i et k.

1. Les caractéristiques du champ E de l'OEM ?

E_0 : c'est l'amplitude du champ, $\mathbf{u_z}$: vecteur de polarisation de E, ω : c'est la fréquence angulaire, k : Vecteur d'onde de propagation de l'OEM et il faut dire que l'onde se propage selon l'axe Ox positif à cause du terme k.r = kx

k= (k**, 0, 0)**

et la longueur d'onde de l'onde est $\lambda=2\pi/k$

2. Champ magnétique associé à E_1 ?

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, Rot$\mathbf{E_1}$= - d**B**/dt, on écrit :

$$\boldsymbol{RotE_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{z} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{-i(\omega t+kx)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ikE_0 e^{-i(\omega t+kx)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Note : ce qui est écrit en caractère gras c'est un vecteur.

Puisque le champ de l'onde est représenté dans le système d'axe Oxyz, (de vecteurs de base $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$, et $\mathbf{u_z}$) son champ magnétique B_1 associé admettra trois composantes ; B_x, B_y et B_z. On écrit donc :

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} B_x \boldsymbol{u_x} + \frac{\partial}{\partial t} B_y \boldsymbol{u_y} + \frac{\partial}{\partial t} B_z \boldsymbol{u_z}$$

Tel que chacun de ces trois termes s'écrit :

$- \frac{\partial}{\partial t} B_x = 0$, B_x= constante = 0

$- \frac{\partial}{\partial t} B_y = ikE_0 e^{-i(\omega t+kx)}$, $B_y = -ikE_0 \int e^{-i(\omega t+kx)}\, dt$ (équation qu'il faut intégrer par rapport au temps).

$- \frac{\partial}{\partial t} B_z = 0$, B_z = constante = 0

Finalement, le champ magnétique associé au champ électrique s'écrit :

$$\boldsymbol{B_1} = -\frac{k}{\omega} E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i(\omega t+kx)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que l'on peut écrire aussi :

$$\boldsymbol{B_1} = -B_0 \boldsymbol{u_y} e^{-i(\omega t+kx)}$$

Le champ magnétique associé à E_1 admet le vecteur polarisation $\mathbf{u_y}$ et une amplitude $B_0 = \frac{k}{\omega} E_0$

3. Rappeler la propriété de transversalité et montrer qu'elle est vérifiée ?

Pour une OEM plane, les champs E_1 et B_1 sont transverses, parce que selon la forme de $\mathbf{E_1}$ (par hypothèse), il admet comme vecteur de polarisation le vecteur $\mathbf{u_z}$ et en ayant appliqué l'Eq. de Maxwell-Faraday, le calcul nous a conduit à trouver que le vecteur de polarisation de B_1 est le vecteur $\mathbf{u_y}$ et on sait que $\mathbf{u_z} \perp \mathbf{u_y}$. Pour montrer que cela est vrai, on regarde les termes $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E_1}$ et $\omega\, \boldsymbol{B_1}$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E_1} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{-i(\omega t+kx)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -kE_0 e^{-i(\omega t+kx)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega \boldsymbol{B_1} = -\cancel{\omega}\frac{k}{\cancel{\omega}}E_0\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i(\omega t+kx)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E_1} = \omega\, \boldsymbol{B_1}$$

Les deux termes calculés indépendamment sont égaux, donc la propriété de transversalité est vérifiée (k, E_1, B_1) sont orthogonaux entre eux.

4. L'OEM est –elle dispersive ? si oui, préciser la condition.

   Pour répondre, il faut chercher l'équation de propagation que vérifie le champ électrique de l'OEM :

$$Rot(Rot\ E_1) = -grad(divE_1) - \Delta E_1$$

$divE_1=0$ (le vide)

calculer $Rot(Rot\ E_1)$= ? et ΔE_1 =? et en remplaçant, vous allez retrouver l'équation k = w/c donc l'onde est dispersive dans son milieu de propagation.

5. Les énergies électrique et magnétique ?

Le vecteur de Poynting : $S = E \times H$

Energie électrique : (½)ε_0 E_1

Energie magnétique (1/2)B_1/μ_0