La cinématique des fluides

Après avoir étudié les fluides et en particulier les liquides au repos (hydrostatique), l'étude des mouvements de fluides semble logique et pertinente.

Ainsi, notre étude débute par la cinématique. D'une manière générale, celle-ci représente la description analytique d'un système en mouvement.

En ce qui concerne la cinématique des fluides, il s'agit d'étudier les mouvements des fluides par rapport au temps. Cela voudra dire indépendamment des causes qui les provoquent (sans tenir compte des forces qui sont à leur source).

On doit donc savoir comment observer et comment d´écrire un milieu fluide en mouvement?

Pour cela, on commence par introduire la notion de « particule fluide ». Puis, on attache à celle-ci (particule fluide), des grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) et des grandeurs thermodynamiques (masse volumique, température, pression, . . .).

Deux méthodes sont alors utilisées pour étudier l'écoulement d'un fluide :

- La méthode de Lagrange :

Cette méthode consiste à individualiser une particule du fluide en mouvement et de la suivre dans son mouvement en fonction du temps. On obtient alors les différentes positions successives de cette particule. En joignant ces différents points par une ligne, on trace la trajectoire de la particule en fonction du temps. Ce qui permet d'obtenir l'équation de la trajectoire en fonction du temps.

En calculant la dérivée par rapport au temps de cette dernière équation, on détermine l'équation temporelle de la vitesse. Autrement dit, l'équation temporelle de la vitesse est la dérivée par rapport au temps de la trajectoire en fonction du temps.

Ensuite, si on dérive l'équation temporelle de la vitesse par rapport au temps c'est-à-dire la dérivée seconde de l'équation de la trajectoire en fonction du temps, on obtient l'équation temporelle de l'accélération.

- La méthode d'Euler :

Cette méthode consiste à choisir un point M(x,y,z) fixe dans la masse du fluide en mouvement et d'étudier toutes les particules qui passent successivement par ce point. On mesure, par exemple, la vitesse de toutes ces particules en fonction du temps. On obtient alors l'équation de la vitesse en fonction du temps.

Les variables et les inconnues des deux méthodes précédentes sont représentées dans le tableau suivant :

	Méthode de Lagrange	Méthode d'Euler
Variables	x_o , y_o , z_o , t	x, y ,z , t
Inconnues	$x = x (x_o , y_o , z_o , t)$ $y = y (x_o , y_o , z_o , t)$ $z = z (x_o , y_o , z_o , t)$	$\vec{V} \begin{cases} u = u (x, y ,z , t) \\ v = v (x, y ,z , t) \\ w = w (x, y ,z , t) \end{cases}$

Où : x , y, z sont les coordonnées de la particule fluide ; x_o , y_o, z_o sont les coordonnées initiales de la particule fluide ;

t représente le temps ; t_0 représente l'instant initial ;

u , u , w sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'écoulement à l'instant t.

<u>Remarque </u>: En mécanique, les deux méthodes sont utilisées.

La méthode de Lagrange est utilisée, prioritairement, en mécanique du solide rigide mais elle est peu utilisée en mécanique des fluides.

Par contre, la méthode d'Euler est utilisée prioritairement en mécanique des fluides.

On peut, facilement, passer de la méthode Lagrange à la méthode d'Euler et réciproquement.

L'étude de la nature d'un écoulement d'un fluide connaissant son champ de vitesse $\vec{V}(u,v,w)$, nécessite l'étude des composantes (u,v,w) de la vitesse $\vec{V}$, l'étude de l'équation de continuité et l'étude du vecteur tourbillon noté $\vec{T}$.

-1- l'étude des composantes (u,v,w) de la vitesse $\vec{V}$:

- Si deux des composantes de la vitesse sont nulles alors l'écoulement est monodirectionnel, prenant ainsi la direction de la composante non nulle.

Par exemple, si seule la première composante u(x,y,z,t) est différente de zéro alors l'écoulement a lieu parallèlement à l'axe Ox.

- Si une seule des composantes est nulle, l'écoulement est bidirectionnel. Dans ce cas l'écoulement est dit « écoulement plan ».

<u>Remarque </u>: un écoulement plan n'est pas un écoulement qui a lieu dans un plan mais c'est un écoulement qui s'effectue de manière identique dans plusieurs plans parallèles entre eux. Cet écoulement est parallèle au plan contenant les deux composantes non nulles.

Par exemple, si seule la troisième composante de la vitesse est nulle (w(x,y,z)=0) alors l'écoulement s'effectuera parallèlement au plan xOy.

- Si les trois composantes de la vitesse ne sont pas nulles alors l'écoulement est tridimensionnel. L'écoulement a donc lieu dans l'espace.

-2- l'étude de l'équation de continuité :

En considèrant un fluide de masse volumique ρ(x,y,z,t) en écoulement à la vitesse $\vec{V}$(u,v,w) et

en utilisant la loi de la conservation de la masse lors d'un écoulement, on obtient l'équation générale de continuité suivante : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho.\vec{V}) = 0$

Dans ce cas, l'une des deux possibilités apparaît :

a) Si cette équation est vérifiée, l'écoulement est dit « conservatif ». Cette équation exprime qu'un élément d'un fluide se déforme en écoulement en conservant son volume.

b) Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'équation de continuité n'est pas vérifiée, alors l'écoulement est dit « non conservatif ».

Nous allons examiner l'application de cette équation générale pour des écoulements particuliers à savoir : les écoulements permanents et les écoulements incompressibles.

Cas d'un écoulement permanent

On appelle écoulement permanent, un écoulement dont les variables d'Euler ne dépendent pas du temps. L'expression de l'équation de continuité va donc être simplifiée (puisque : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) pour devenir : $\text{div}\,(\rho.\vec{V}) = 0$

Cas d'un écoulement incompressible

Un écoulement incompressible est un écoulement dont le fluide possède une masse volumique constante aussi bien dans le temps que dans l'espace (donc ρ = cste et dρ = 0).

L'expression de l'équation de continuité précédente va donc de nouveau être simplifiée puisque : $\frac{d\rho}{dt} = 0$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\longrightarrow$ $\text{div}\,(\rho.\vec{V}) = \rho\,(\text{div}\,\vec{V}) = 0$, pour devenir : $\text{div}\,\vec{V} = 0$

En résumé, l'équation de continuité d'un écoulement permanent d'un fluide incompressible est donc : $\text{div}\,\vec{V} = 0$

Lorsque l'écoulement est conservatif, c'est-à-dire lorsque l'équation précédente est vérifiée, l'écoulement a lieu à débit constant.

On appelle, débit dans ce cas, une quantité de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite. Ce débit est noté par **Q**.

La quantité de fluide peut être mesurée :

- Soit par sa masse : on obtient un débit massique noté $\mathbf{Q_m}$. Ce dernier représente la masse (M) de fluide par unité de temps (t) qui traverse une section droite quelconque de la conduite. Ce débit est donné par la formule suivante :

$$\mathbf{Q_m} = \frac{M}{t} \quad \text{donc son unité dans le système S.I est (Kg /s).}$$

- Soit par son volume: on obtient un débit volumique noté $\mathbf{Q_v}$. Ce dernier représente le volume (v) de fluide par unité de temps (t) qui traverse une section droite quelconque de la conduite. Ce débit en donné par la formule suivante :

$$\mathbf{Q_v} = \frac{v}{t} \quad \text{donc son unité dans le système S.I est } (m^3\,/s).$$

Bien sûr, la masse d'un corps est reliée à son volume par la masse volumique ρ du corps. Donc le débit massique $\mathbf{Q_m}$ est relié au débit volumique $\mathbf{Q_v}$ par la relation $\mathbf{Q_m} = \rho .\, \mathbf{Q_v}$

Dans le cas, où on considère un écoulement d'un fluide incompressible à la vitesse $\vec{V}$ dans une conduite de section S, le débit volumique est donné par :

$\mathbf{Q_v} = S.V$ où : S est en (m^2) et V (étant le module de la vitesse $\vec{V}$) en (m / s).

Donc, pour un écoulement conservatif à débit constant, lorsque la section de la conduite varie, on peut écrire : $\mathbf{Q_v} = S_1.V_1 = S_2.V_2 = S_3.V_3 = ... = C^{ste}$.

-3- l'étude du vecteur tourbillon noté $\vec{T}$

Le vecteur tourbillon noté $\vec{T}$ est défini comme étant égal à la moitié du rotationnel du vecteur vitesse $\vec{V}$, donc

$$\vec{T} = \frac{1}{2}\, \mathrm{Rot}\, \vec{V}$$

Deux cas se présentent après la détermination de ce vecteur :

a) Le vecteur tourbillon $\vec{T}$ est nul ($\vec{T} = \vec{0}$) c'est-à-dire le rotationnel du vecteur vitesse est égal à zéro : dans ce cas l'écoulement est irrotationnel.

b) Le vecteur tourbillon $\vec{T}$ n'est pas nul ($\vec{T} \neq \vec{0}$) c'est-à-dire le rotationnel du vecteur vitesse est différent de zéro : dans ce cas l'écoulement est rotationnel.

En résumé, on peut citer quelques exemples de nature d'écoulement connaissant leur champ de vitesse $\vec{V}$(u,v,w):

a) un écoulement permanent monodirectionnel (parallèle à l'axe Oy, par exemple, si seule la composante v(x,y,z) ≠ 0), conservatif (si div$\vec{V}$ = 0) et irrotationnel (si $\vec{T} = \vec{0}$);

b) un écoulement permanent bidirectionnel ou plan (s'effectuant de manière identique parallèlement au plan xOz, par exemple, si u(x,y,z) ≠ 0 et w(x,y,z) ≠ 0), conservatif (si div $\vec{V}$ = 0) et rotationnel (si $\vec{T} \neq \vec{0}$);

c) un écoulement permanent tridirectionnel ayant lieu dans l'espace (les trois composantes (u,v, w) de la vitesse sont différentes de zézo), non conservatif (si div $\vec{V} \neq 0$) et irrotationnel (si $\vec{T} = \vec{0}$).