Chapitre I : Méthodes classiques de résolution des systèmes linéaires

I/ Rappel Mathématique

I.1/ ~~Système linéaire~~

Soit le système linéaire $[A]\{x\}=\{b\}$ à résoudre :

avec $\begin{cases} [A] \in \mathbb{R} \text{ : matrice carrée de dimension } (n \times n) \\ \{x\} \text{ et } \{b\} \text{ : Vecteurs de dimension } n \end{cases}$

Le système $[A]\{x\}=\{b\}$ admet une solution unique si et seulement si son déterminant est non-nul.

si le déterminant est nul,

a/ soit le système a une infinité de solution

b/ soit le système n'a pas de solutions.

Exemple 1 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ 4x_1-3x_2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ déterminant $=-18$, le système a une solution unique : $x_1=1$ et $x_2=1$

Exemple 2 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ 4x_1+6x_2=10 \end{cases}$ $\Rightarrow$ déterminant $=0$, les 2 équations du système sont reliés $(L_2=2L_1)$ le système a une infinité de solutions.

Exemple 3 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ 4x_1+6x_2=9 \end{cases}$ $\Rightarrow$ déterminant $=0$ mais les équations du système sont indépendantes donc le système n'a pas de solution

I.2 Propriétés des systèmes linéaires

a/ Permutation : Dans un système d'équations, nous pouvons permuter entre deux lignes au plus, ainsi qu'entre colonnes.

Exemples

1/ Permutation entre lignes :

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=5 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=1 \\ -x_1+4x_2+3x_3=4 \end{cases} \Rightarrow$$

Permutation entre lignes 1 et 2 :

$$\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=5 \\ -x_1+4x_2+3x_3=4 \end{cases}$$

2/ Permutation entre colonnes

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=5 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=1 \\ -x_1+4x_2+3x_3=4 \end{cases} \Rightarrow$$

si On permute entre la colonne 1 et la colonne 3, le système devient :

$$\begin{cases} x_3+3x_2+2x_1=5 \\ -2x_3-3x_2+4x_1=1 \\ 3x_3+4x_2-x_1=4 \end{cases}$$

b/ Multiplication

Nous pouvons multiplier une équation d'un système linéaire par un réel non nul (λ) et remplacer cette équation par le résultat obtenu :

Exemple : $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=5 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=1 \\ -x_1+4x_2+3x_3=4 \end{cases} \Rightarrow$

si On multiplie la 1ere équation par $\lambda=3$, On obtient :

$$\begin{cases} 6x_1+9x_2+3x_3=15 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=1 \\ -x_1+4x_2+3x_3=4 \end{cases}$$

c/ Addition

Nous pouvons dans un système d'équations remplacer une équation par la somme de deux ou plus équations du système

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=5 \ (L_1) \\ 4x_1-3x_2-2x_3=1 \ (L_2) \\ -x_1+4x_2+3x_3=4 \ (L_3) \end{cases} \Rightarrow$$

Après avoir ajouter L_1 à L_3 et enlever L_2 $(L_1+L_3-L_2)$ et la remplacer à la place de L_3 le système devient :

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=5 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=1 \\ -3x_1+10x_2+6x_3=8 \ (L_1+L_3-L_2) \end{cases}$$

II/ Méthodes de résolution directes

Ce sont des méthodes exactes qui permettent de résoudre un système d'équations linéaire. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer : la méthode de Gauss, méthode de Factorisation, méthode de Cholesky.

II 1/ Méthode de GAUSS

Le principe de la méthode de Gauss consiste à triangulariser la matrice [A] du système $[A]\{x\}=\{b\}$. La résolution se fait ensuite en remontant par le bas, à résoudre successivement toutes les équations.

- La triangularisation se fait en considérant les propriétés d'échanges, présentées précédemment.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5 & (L_1) \\ 4x_1+4x_2-3x_3=3 & (L_2) \\ -2x_1+3x_2-x_3=1 & (L_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5 & (L_1) & L_1 \\ 0 \ -2x_2-x_3=-7 & (L_2-2L_1) & L'_2 \\ 0 \ +6x_2-2x_3=6 & (L_3+L_1) & L'_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5 & (L'_1) \\ \quad -2x_2-x_3=-7 & (L'_2) \\ \quad 0x_2-5x_3=-15 & (L'_3+3L'_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=\frac{-15}{-5}=3=\frac{b_3}{a_{33}} \\ x_2=\frac{-7+x_3}{-2}=2=\frac{b_2-a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_1=\frac{5-3x_2+x_3}{2}=1=\frac{b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3}{a_{11}} \end{cases}$$

a/ Description de l'algorithme de GAUSS :

La méthode de Gauss est composée de 2 parties :

1/ Triangularisation : La triangularisation est basée sur la formule suivante : $L_i - CL_k$ avec $C=\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ $\quad k=1, n-1$; $i=k+1, n$

- L'indice "k" est le numéro de l'étape (la transformation) qui varie de 1 à n-1
- L'indice "i" est le numéro de la ligne à transformer. Pour chaque "k", l'indice "i" varie de k+1, n

Or la ligne L_i est composée de (a_{ij} et b_i) et j varie de 1 à n. Par conséquent, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{cases} a_{ij} = a_{ij} - c\,a_{kj} \\ b_i = b_i - c\,b_k \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}} \quad \begin{cases} k = 1, n-1 \\ i = k+1, n \\ j = k, n \end{cases}$$

Le terme a_{kk} doit être différent de zéro pour pouvoir l'utiliser.

→ Si $a_{kk} = 0$, nous devons rechercher un $a_{pk} \neq 0$ avec $(p > k)$ jusqu'à la dernière ligne (ligne n).

→ Si on arrive à la dernière équation ("n") et on ne trouve pas de terme non nul, il faut afficher un message que le système n'a pas de solution et arrêter le calcul.

ii/ Résolution

Lorsqu'on a un système triangulaire supérieur, c à d lorsque $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$, alors l'algorithme de résolution fonctionne par parcours inverse.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad\qquad i = n-1, 1 \\ x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j}{a_{ii}} \end{aligned}}$$

b/ La stratégie du choix du pivot

La méthode de Gauss repose sur la formule $L_i = L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k$.
Le terme a_{kk} est appelé le pivot. Il faut que ce terme soit différent de zéro. Egalement, lorsque ce coefficient est très faible, il peut entraîner l'apparition de très grandes valeurs et donc de grands risques d'imprécisions et d'erreurs numériques. Pour cela, afin d'implémenter cette méthode on doit suivre une stratégie du choix du pivot consistant à chercher le plus grand pivot en valeur absolue.

Il existe trois possibilités, afin de rechercher ce maximum :

i/ Rechercher le maximum parmi les lignes suivant le pivot actuel et ensuite permuter les équations sans changer le système ni sa solution. Le pivot maximum est défini par $\max |a_{ik}|_{i=k,n}$. Cette méthode est appelée stratégie du pivot partiel par colonne (car la recherche se fait sur la colonne). C'est la méthode la plus simple.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Le pivot actuel $a_{11} = 2$

le $\max |a_{ik}|_{i=1,3} =$

$\max (|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|) = 4$

On doit donc permuter entre la ligne 2 et la ligne 1 ; le système devient donc :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ii/ La seconde méthode consiste à rechercher le maximum parmi les colonnes. c.à.d, chercher le plus grand pivot sur la ligne du pivot actuel. Celui-ci est défini par $\max |a_{ki}|_{i=k,n}$

Cette méthode est appelée également stratégie par pivot partiel mais par ligne. L'inconvénient de cette 2ème méthode par rapport à la 1ère, c'est qu'elle ne conserve pas le système initial. Mais il faut obligatoirement tenir compte d'un réagencement des solutions puisque le programme doit mémoriser toute la séquence de réagencements succesifs afin de pouvoir remettre la solution dans le bon ordre. C'est une méthode plus compliquée que la 1ère.

Exemple

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad 1} \\ 4 \quad -3 \quad -2 \\ -1 \quad 4 \quad 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Le pivot actuel $a_{11} = 2$

le plus grand pivot est donné par le $\max |a_{ki}|$

$\max(|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{13}|) = 3$

On doit donc permuter entre la colonne 1 et la colonne 2, le système devient alors :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

iii/ La 3ème méthode consiste à mixer entre les 2 autres méthodes et donc rechercher le maximum défini par $\max |a_{ij}|_{\substack{i=k,n \\ j=k,n}}$

La recherche se fait donc par lignes et colonnes. C'est la stratégie du pivot total, cette méthode présente les mêmes inconvénients que la précédente.

exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Le pivot max = 6, on doit donc remettre cette valeur à la place de a_{11}, pour ceci, on doit faire 2 changements : changement de la ligne 3 avec la ligne 1

Ensuite la colonne 2 avec la colonne 1

Le système s'arrange comme ceci :

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Application 1 (l'utilité du choix du plus grand pivot)

On considère les 2 systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 10^{-k} x_1 + x_2 = 0{,}5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 10^{-k} x_1 + x_2 = 0{,}5 \end{cases}$$

Les 2 systèmes sont équivalents, pour le système (S_1) nous avons un pivot $a_{11} = 10^{-k}$ et pour le système (S_2) nous avons permuté les lignes et par conséquent le pivot $a_{11} = 1$.

* Résolvons le système (S_1) par la méthode de Gauss.

$$(S_1)\begin{cases} 10^{-k} x_1 + x_2 = 0{,}5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{-k} x_1 + x_2 = 0{,}5 \\ (1 - 10^{k})\, x_2 = 1 - 0{,}5 \times 10^{k} \end{cases}$$

En fonction la valeur de k, on obtient les solutions suivantes :

Valeur de k	10	12	14	16
Solution	$x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 0{,}5$	$x_1 = 0{,}4999$ $x_2 = 0{,}5$	$x_1 = 0{,}4996$ $x_2 = 0{,}5$	$x_1 = 1{,}1102$ → Valeur érronée. $x_2 = 0{,}5$

* Résolvons le système (S_2) par la méthode de Gauss :

$$(S_2)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 10^{-k} x_1 + x_2 = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ (1 - 10^{-k})\, x_2 = 0{,}5 - 10^{-k} \end{cases}$$

La solution sera donc :

Valeur de k	10	12	14	16
Solution	$x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 0{,}5$	$x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 0{,}5$	$x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 0{,}5$	$x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 0{,}5$

Application 2 (stratégie du pivot partiel)

Le pivot est défini par $\max |a_{ik}|_{i=k,n}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}6\\1\\6\end{matrix} & \begin{matrix}9\\2\\9\end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss repose sur la formule :

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj} \\ b_i = b_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k \end{cases}$$

$k=1$: Pivot $= \max(|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|) = 3$, On permute la ligne 1 avec la ligne 3, le système devient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ligne 2 : $i=2$, $J=2,3 \Rightarrow \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{2}{3}$

$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{2}{3} a_{12} = 1 - \frac{2}{3} \cdot 6 = -3$ $\quad b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - \frac{2}{3} b_1^{(0)} = 2 - \frac{2}{3}(3) = 0$

$a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - \frac{2}{3} a_{13} = 2 - \frac{2}{3} \cdot 9 = -4$

ligne 3 : $i=3$, $J=2,3$, $\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{1}{3}$

$a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - \frac{1}{3} a_{13}^{(0)} = 9 - \frac{1}{3} \cdot 9 = 6$; $\quad b_3^{(1)} = b_3^{(0)} - \frac{1}{3} b_1^{(0)} = 1 - \frac{1}{3}(3) = 0$

$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - \frac{1}{3} a_{12}^{(0)} = 6 - \frac{1}{3}(6) = 4$

Le système de la 1ère transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}-3\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}-4\\6\end{matrix} \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k=2$: Pivot $= \max(|a_{22}|, |a_{32}|) = 4$, On permute la ligne 2 avec la ligne 3, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la ligne 3 $i=3$, $J=3 \Rightarrow \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = \dfrac{-3}{4}$

$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + \frac{3}{4} a_{23}^{(1)} = -4 + \frac{3}{4}(6) = \frac{1}{2}$

$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} + \frac{3}{4} b_2^{(1)} = 0$

On écrit le système triangulaire obtenu :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{matrix}}$$

Application 3 (stratégie du pivot total)

Le pivot est défini par $\max |a_{ij}|_{\substack{i=k,n \\ j=k,n}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$k=1$: Pivot $= \max(|a_{ij}|) = a_{33} = 12$, On permute la ligne 1 et la ligne 1. Ensuite, on permute les colonnes 1 et 3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ligne 2 : $i = 2$, $J = 2,3 \Rightarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{1}{6}\left(a_{12}^{(0)}\right) = 1 - \frac{1}{6}(6) = 0$

$a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - \frac{1}{6} a_{13}^{(0)} = 2 - \frac{1}{6}(3) = \frac{3}{2}$

$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - \frac{1}{6}\left(b_1^{(0)}\right) = 2 - \frac{1}{6}(3) = \frac{3}{2}$

ligne 3 : $i = 3$, $J = 2,3 \Rightarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - \frac{3}{4} a_{12}^{(0)} = 6 - \frac{3}{4}(6) = \frac{3}{2}$

$a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - \frac{3}{4} a_{13}^{(0)} = 1 - \frac{3}{4}(3) = -\frac{5}{4}$

$b_3^{(1)} = b_3^{(0)} - \frac{3}{4} b_1^{(0)} = 1 - \frac{3}{4}(3) = -\frac{5}{4}$

le système après la 1ère transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -5/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ -5/4 \end{pmatrix}$$

$k=2$: Pivot $= \max |a_{ij}|_{\substack{i=2,3 \\ j=2,3}}$, Nous avons le choix entre a_{23} et $a_{32} = \frac{3}{2}$

On peut soit permuter la ligne 2 et la ligne 3. Ou bien permuter la colonne 2 avec la colonne 3. On choisit la solution la plus simple c à d : inverser entre la ligne 2 et la ligne 3, le système devient donc :

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 0 & 3/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Le système est déjà triangulaire donc, On peut faire directement la résolution :

$$\boxed{x_1 = 1 \;;\; x_2 = 0 \;;\; x_3 = 0}$$

II.2/ Méthode de factorisation LU :

- La méthode de CROUT est fondée sur la factorisation qui affirme que pour une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre "n" telle que les n sous-matrices soient inversibles, il existe une matrice triangulaire inférieure $(L = L_{ij})$ avec $L_{ii} = 1 \ (1 \leq i \leq n)$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. Cette décomposition est unique. En particulier toute matrice inversable admet une factorisation LU.

L'algorithme est le suivant :

* On calcule les matrices $[L]$ et $[U]$ telles que $[A] = [L][U]$
* Le système $[A]\{x\} = \{b\} \Leftrightarrow [L][U]\{x\} = \{b\}$. On résout le système par la méthode de remontée : On pose $\{y\} = [U]\{x\}$

Le système s'écrit : $[L]\{y\} = \{b\}$. Le système est alors résolu par la méthode de remontée en y. La même méthode, appliquée en sens inverse, donne la valeur de $\{x\}$

$[L] : [\triangle]$, $[U] : [\nabla]$

$$\begin{cases} L_{ii} = 1 \\ L_{ij} = 0 \quad J > i \; (J = i+1, n) \end{cases} \qquad U_{ij} = 0 \; (J < i) \; (J = 1, i-1)$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [A]\{x\} = \{b\}$$

i/ Ecrire le système sous la forme $[L][U]\{x\} = \{b\}$

on calcule tout d'abord les 2 matrices $[L]$ et $[U]$.

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad [U] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = L_{ik} U_{kj}$; Si $L_{11} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = L_{11} U_{11} \Rightarrow U_{11} = a_{11} = 2 \\ a_{12} = L_{11} U_{12} + \underbrace{L_{12}}_{} U_{22} \Rightarrow U_{12} = a_{12} = 3 \\ a_{13} = L_{11} U_{13} + \underbrace{L_{12}}_{0} U_{23} + \underbrace{L_{13}}_{} U_{33} \Rightarrow U_{13} = a_{13} = -1 \end{cases}$

La 1ere ligne de $[U]$ n'est autre que la 1ere ligne de $[A]$:

on calcule maintenant la 1ere colonne de L :

$$\begin{cases} a_{21} = L_{21} U_{11} + L_{22} \underbrace{U_{21}}_{0} + L_{23} \underbrace{U_{31}}_{0} \\ a_{31} = L_{31} U_{11} + L_{32} \underbrace{U_{21}}_{0} + L_{33} \underbrace{U_{31}}_{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{21} = \dfrac{a_{21}}{U_{11}} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ L_{31} = \dfrac{a_{31}}{U_{11}} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Ensuite, on calcule la 2eme ligne de U $(L_{22} = 1)$:

$$a_{22} = L_{21} U_{12} + L_{22} U_{22} + \underbrace{L_{23}}_{0} U_{32} \Rightarrow U_{22} = \frac{a_{22} - L_{21} U_{12}}{L_{22}} = \frac{4 - 2\times 3}{1} = -2$$

$$a_{23} = L_{21} U_{13} + L_{22} U_{23} + \underbrace{L_{23}}_{0} U_{33} \Rightarrow U_{23} = \frac{a_{23} - L_{21} U_{13}}{L_{22}} = \frac{-3 - (2)(-1)}{1} = -1$$

On calcule ensuite, la 2eme colonne de L

$$a_{32} = L_{31} U_{12} + L_{32} U_{22} + L_{33} \underbrace{U_{32}}_{0} \Rightarrow L_{32} = \frac{a_{32} - L_{31} U_{12}}{U_{22}} = \frac{3 - (-1)(3)}{-2} = -3$$

enfin, On calcule la dernière ligne de U (3ème ligne) : ($L_{33}=1$)

$a_{33}=L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33}U_{33} \Rightarrow U_{33}=\dfrac{a_{33}-L_{31}U_{13}-L_{32}U_{23}}{L_{33}}$

$U_{33}=\dfrac{-1-[(-1)(-1)+(-3)(-1)]}{1}=-5$

II/ La résolution :

La résolution se fait en 2 parties :

$\begin{cases}[L]\{y\}=\{b\} \Rightarrow \text{On calcule le vecteur } \{y\} \\ [U]\{x\}=\{y\} \Rightarrow \text{On calcule ensuite le vecteur } \{x\}\end{cases}$

• $[L]\{y\}=\{b\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{b_1}{L_{11}}=5 \\ y_2=\dfrac{b_2-L_{21}y_1}{L_{22}}=3-2\times5=-7 \\ y_3=\dfrac{b_3-L_{31}y_1-L_{32}y_2}{L_{33}}=-15\end{cases}$

• $[U]\{x\}=\{y\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -7\\ -15\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{y_3}{U_{33}}=\dfrac{-15}{-5}=3 \\ x_2=\dfrac{y_2-U_{23}x_3}{U_{22}}=2 \\ x_1=\dfrac{y_1-U_{12}x_2-U_{13}x_3}{U_{11}}=\end{cases}$

a/ Description de l'algorithme de la méthode de factorisation :

La méthode de factorisation est composée de 2 parties :

1/ Calcul des matrices [L] et [U] :

Le calcul des matrices est basé sur les formules suivantes :

→ La 1ère ligne de [U] est égale à la 1ère ligne de [A] donc :

$U_{1j}=a_{1j}\ (j=1,n)$

→ La 1ère colonne de [L] : $L_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{U_{11}}\ (i=1,n)$ avec $L_{ii}=1$

→ [L] est une matrice triangulaire inférieure c.à.d. $L_{ij}=0\ (j=i+1,n)$

→ [U] est une matrice triangulaire supérieure c.à.d : $U_{ij}=0\ (j=1,i-1)$

Les formules utilisées pour calculer les autres lignes :

$$\boxed{U_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}}$$

$$\boxed{L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}}{U_{jj}}}$$

ii/ La résolution du système $[A]\{x\}=\{b\}$:

$$[L]\underbrace{[U]\{x\}}_{\{y\}}=\{b\} \Leftrightarrow \begin{cases} [L]\{y\}=\{b\} \\ [U]\{x\}=\{y\} \end{cases}$$

- Le 1er système donne : $\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\, y_j \end{cases}$ $\quad \boxed{y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\, y_j}$

- Le système 2 " $[U]\{x\}=\{y\}$ " donne : $\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{U_{nn}} \\ x_i = \dfrac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} U_{ij}\, x_j}{U_{ii}} \end{cases}$ $\quad \boxed{x_i = \dfrac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} U_{ij}\, x_j}{U_{ii}}}$

II.3/ Méthode de CHOLESKY :

La méthode d'André-Louis Cholesky (1875-1918) s'applique aux matrices symétriques. Elle est fondée sur le théorème suivant qui affirme que pour une matrice symétrique définie positive $[A]$, il existe "au moins" une matrice triangulaire inférieure inversible $[L]$ telle que $[A]=[L][L]^T$. Si les éléments diagonaux de $[L]$ sont strictement positifs la matrice $[L]$ est unique.

Exemple Soit une matrice $[A]$ de taille (3×3) :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

i/ Ecrire la matrice [A] sous la forme : $[A] = [L][L]^T$. On calcule la matrice [L] et sa transposée, en sachant que :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [L]^T = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

Le produit des deux matrices donne que pour :

- Les termes diagonaux :

$$a_{11} = L_{11}^2 \Rightarrow L_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad ; \quad a_{22} = L_{21}^2 + L_{22}^2 \Rightarrow L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{21}^2}$$

$$a_{33} = L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \Rightarrow L_{33} = \sqrt{a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2}$$

Ce qui peut être généralisé en cette formule : $\boxed{L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}}$

- Les autres termes : L_{21}, L_{31}, L_{32}

$$a_{21} = L_{21} L_{11} \Rightarrow L_{21} = \frac{a_{21}}{L_{11}} \quad ; \quad a_{31} = L_{31} L_{11} \Rightarrow L_{31} = \frac{a_{31}}{L_{11}}$$

$$a_{32} = L_{31} L_{21} + L_{32} L_{22} \Rightarrow L_{32} = \frac{a_{32} - L_{31} L_{21}}{L_{22}}$$

Ce qui donne pour une ième étape : $\boxed{L_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} L_{ik}}{L_{ii}}}$

ii/ On résout ensuite le système $[L]\{y\} = \{b\}$ puis $[L]^T\{x\} = \{y\}$ par un double balayage

$$[L]\{y\} = \{b\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{L_{11}} \\ y_2 = \dfrac{b_2 - L_{21} y_1}{L_{22}} \\ y_3 = \dfrac{b_3 - L_{31} y_1 - L_{32} y_2}{L_{33}} \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire $\boxed{y_i = \dfrac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} y_k}{L_{ii}}}$ $i=1,n$

Ensuite pour déterminer le vecteur $\{x\}$, on résout le système

$$[L]^T\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{y_3}{L_{33}} \\ x_2 = \dfrac{-L_{32} x_3 + y_2}{L_{22}} \\ x_1 = \dfrac{y_1 - L_{21} x_2 - L_{31} x_3}{L_{11}} \end{cases}$$

Ce qui donne : $\boxed{x_i = \dfrac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} L_{ki} x_k}{L_{ii}}}$ $i=1,n.$

a/ Description de l'algorithme de la méthode de Cholesky :

La méthode de Cholesky est Composée de 2 parties :

i/ Calcul des termes de la matrice $[L]$

$$\boxed{L_{JJ}^2 = a_{JJ} - \sum_{k=1}^{J-1} L_{Jk}^2} \qquad \boxed{L_{iJ} = \frac{a_{iJ} - \sum_{k=1}^{J-1} L_{ik} L_{Jk}}{L_{JJ}}} \quad J+1 \leq i \leq n$$

ii/ La résolution du système $[A]\{x\} = \{b\}$

$[A]\{x\} = \{b\} \Leftrightarrow [L]\underbrace{[L]^T\{x\}}_{\{y\}} = \{b\}$ avec :

$$\boxed{y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} y_k}{L_{ii}}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} L_{ki} x_k}{L_{ii}}}$$