Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

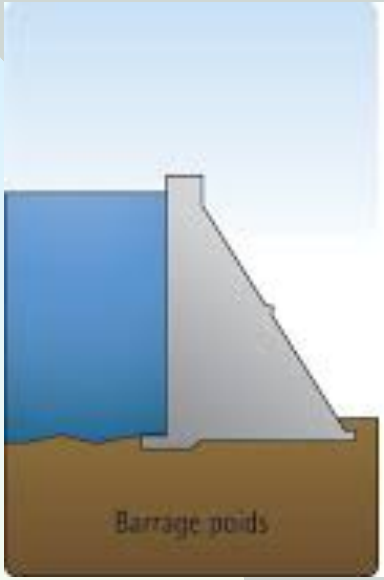
Chap. 6

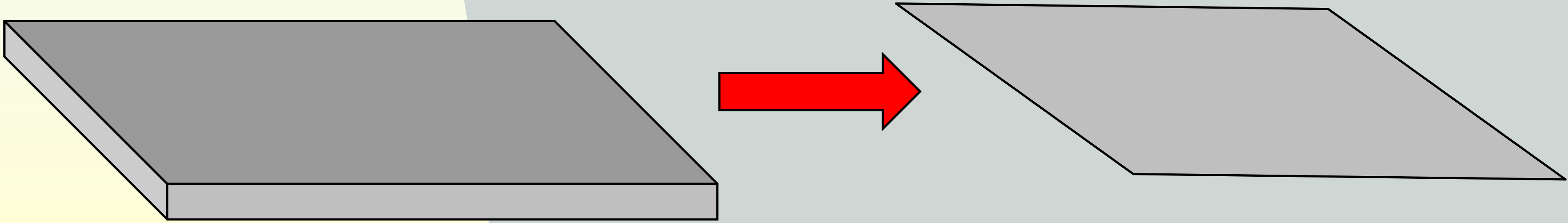
Elasticité Plane en Coordonnées Cartésiennes

COURS 8 **Dimanche 26.04.2020**

1. Introduction

?





© Abdellatif MEGNOUNIF FSI-Tlemcen

Passer de 3D à 2D

Déformation Plane

Contrainte Plane

2. Déformation Plane

Valable généralement pour des structures très étendues suivant une direction (par exemple la direction « z »).

Si une structure est :

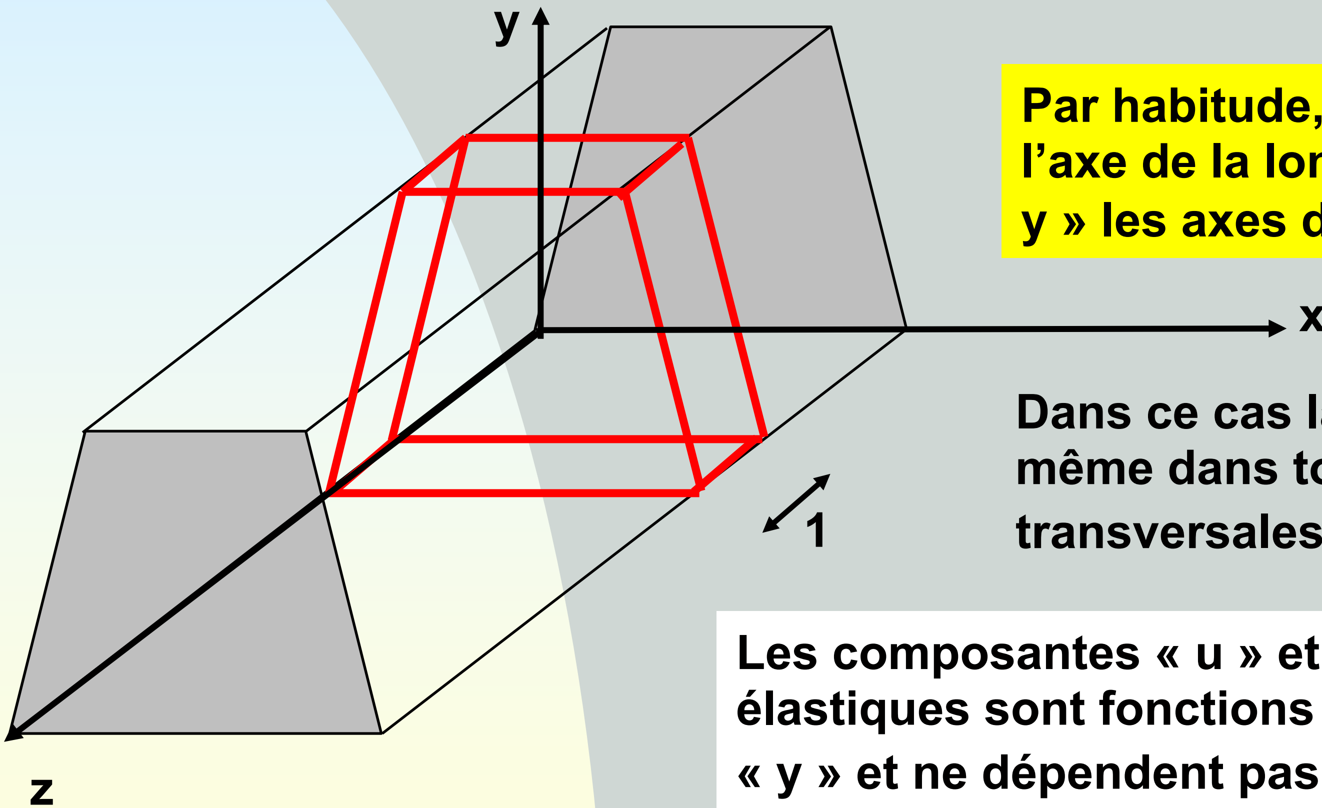
- **De longueur très importante par rapport aux 02 autres dimensions.**
- **Sollicitée par des forces perpendiculaires aux éléments longitudinaux et ne changent pas le long de la longueur.**
- **De section transversal constante le long de la longueur**
- **Le matériau est le même dans toute la structure**

Alors on peut parler de

Déformation Plane

2. Déformation Plane

Toute section loin des extrémités subit une déformation plane et les déplacements de tous les points de la structure déformée se trouvent dans des plans perpendiculaires à la longueur de la structure



Par habitude, on prendra l'axe « z » l'axe de la longueur et les axes « x et y » les axes dans le plan

Dans ce cas la déformation est la même dans toutes les sections transversales de la structure

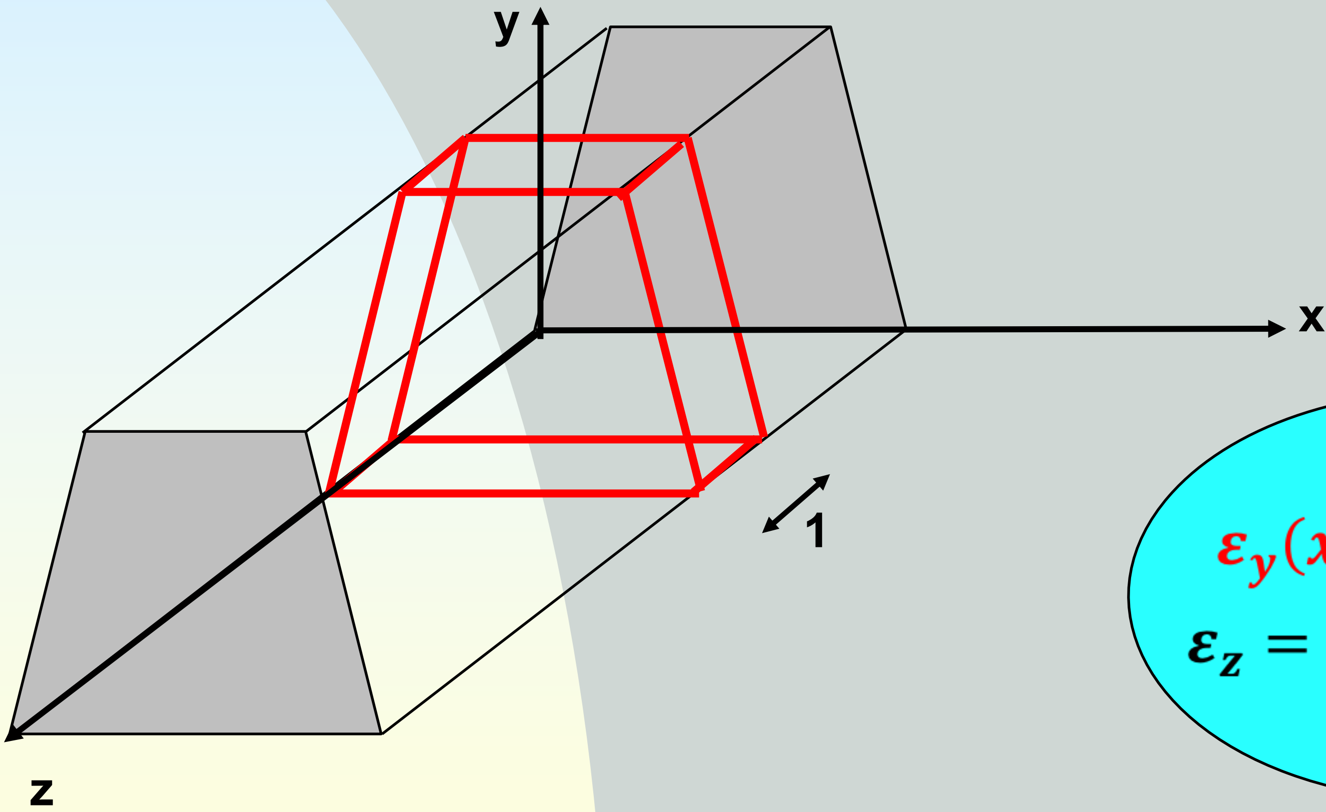
Les composantes « u » et « v » du déplacements élastiques sont fonctions uniquement de « x » et « y » et ne dépendent pas de « z »

$$u(x,y) \quad ; \quad v(x,y)$$

$$w=0$$

2. Déformation Plane

Par conséquent pour chaque plan « z=Cte », le déplacement est le même et localisé dans ce plan

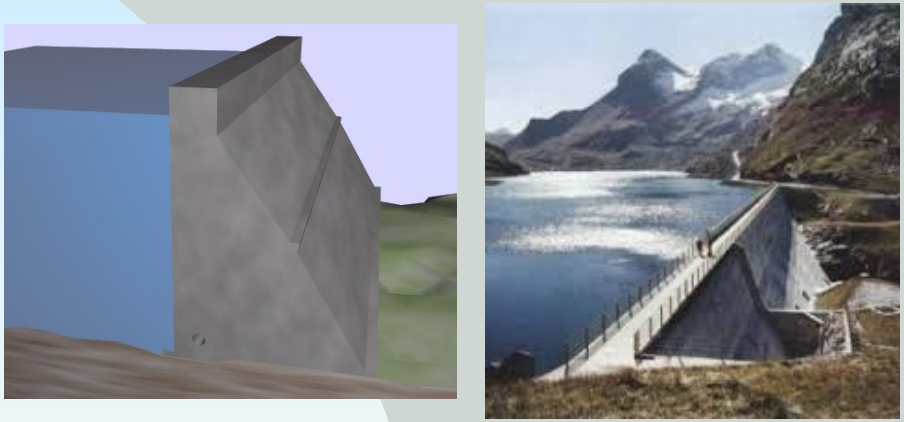


On aura donc

$\varepsilon_x(x,y)$;
$\varepsilon_y(x,y); \gamma_{xy}(x,y)$
$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0;$

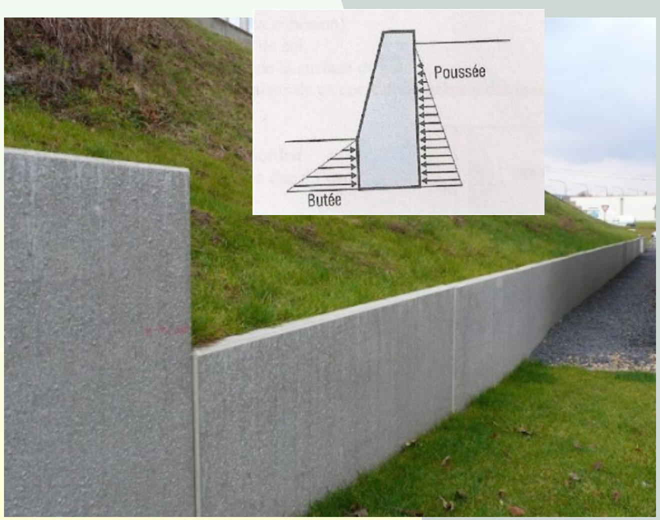
2. Déformation Plane

Exemples



Barrage droit

Conduite sous Pression



Mur de Soutènement

Tunnel

2. Déformation Plane

A partir des hypothèses prises, on aura

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(6.1)}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Or

Loi de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \vartheta\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0$$

De la 3ème on peut tirer

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0 \quad ; \quad \sigma_z = \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \qquad \textbf{(6.2)}$$

2. Déformation Plane

En remplaçant σ_z dans les 02 autres équations, on aura

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \vartheta(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \vartheta\left(\sigma_y + \vartheta(\sigma_x + \sigma_y)\right)\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \vartheta(\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \vartheta\left(\sigma_x + \vartheta(\sigma_x + \sigma_y)\right)\right]$$

Après réarrangement des termes, on aura

$$\varepsilon_x = \frac{1-\vartheta^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\vartheta}{1-\vartheta}.\sigma_y\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1-\vartheta^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\vartheta}{1-\vartheta}.\sigma_x\right]$$

En posant :

$$E_1 = \frac{E}{1-\vartheta^2} \quad ; \quad \vartheta_1 = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$$

alors

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\vartheta_1)} = \frac{E}{2(1+\vartheta)} = G \qquad (6.3)$$

On aura:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_x - \vartheta_1.\sigma_y\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_y - \vartheta_1.\sigma_x\right] \qquad (6.4)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_1} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

2. Déformation Plane

Les inconnues

Contraintes (03)

$\sigma_x(x,y)$; $\sigma_y(x,y)$;

$\tau_{xy}(x,y)$

Déformations (03)

$\varepsilon_x(x,y)$; $\varepsilon_y(x,y)$;

$\gamma_{xy}(x,y)$

Déplacements (02)

$u(x,y)$;

$v(x,y)$

08 inconnues

08 équations

2. Déformation Plane

a) Equations de l'étude statique (02)

i) Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

ii) Conditions aux limite

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

2. Déformation Plane

b) Equations de l'étude géométrique (03)

i) Equations de Cauchy (Extensions et distorsions)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ii) Equations de compatibilité (St Venant)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y}$$

2. Déformation Plane

c) Equations de l'étude physique (03)

i) Equations de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\left(1-\vartheta^2\right)\sigma_x - \vartheta(1+\vartheta)\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\left(1-\vartheta^2\right)\sigma_y - \vartheta(1+\vartheta)\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\vartheta)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

ii) Equations de Lamé

$$\sigma_x = (2G+\lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y$$

$$\sigma_y = (2G+\lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x$$

$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

2. Déformation Plane

Tenseurs

i) Tenseur des Contraintes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta.\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{bmatrix}$$

ii) Tenseur des Déformations

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}.\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}.\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Contrainte Plane

Le cas le plus connu est celui d'une plaque mince soumise à des forces dans le plan uniformément distribuées sur toute l'épaisseur

Si une structure est :

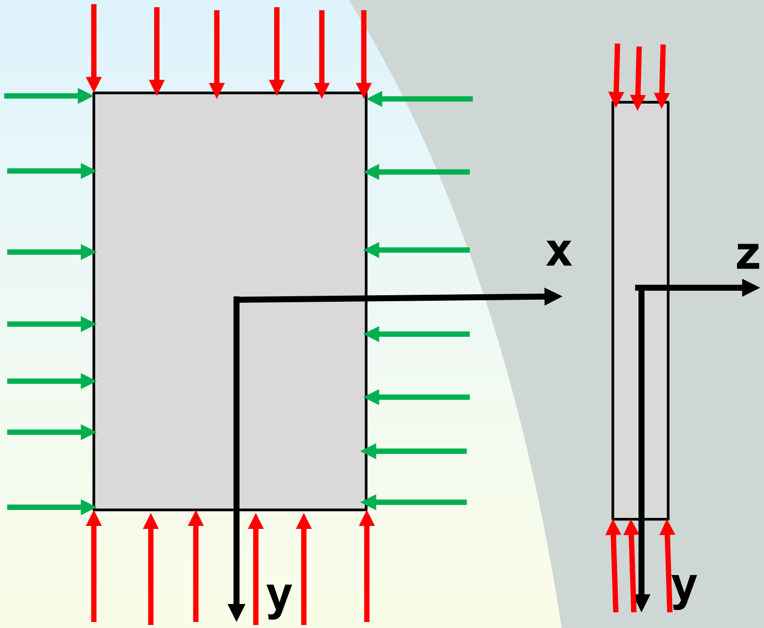
- **Mince (épaisseur très petite devant les 02 autres)**
- **Les 02 autres dimensions sont de même grandeur**
- **Soumise à une charge dans le plan uniformément répartie sur l'épaisseur**
- **Le matériau est le même dans toute la structure**

Alors on peut parler de

Contrainte Plane

3. Contrainte Plane

Toute section à l’intérieur de l’épaisseur subit une contrainte plane et les déplacements de tous les points de la structure déformée se trouvent dans des plans appartenant à l’épaisseur de la structure



Par habitude, on prendra l’axe « z » l’axe de l’épaisseur et les axes « x et y » les axes dans le plan

Dans ce cas contrainte est la même dans toutes les sections de l’épaisseur de la structure

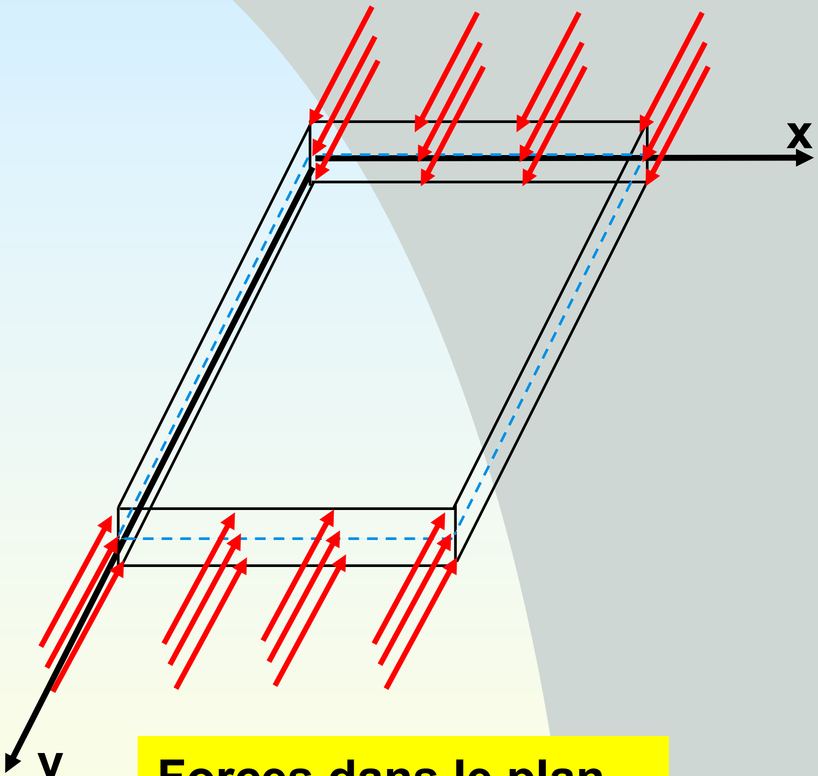
Les composantes « u » et « v » du déplacements élastiques sont fonctions uniquement de « x » et « y » et ne dépendent pas de « z »

$$u(x,y) \quad ; \quad v(x,y)$$

$$w=0$$

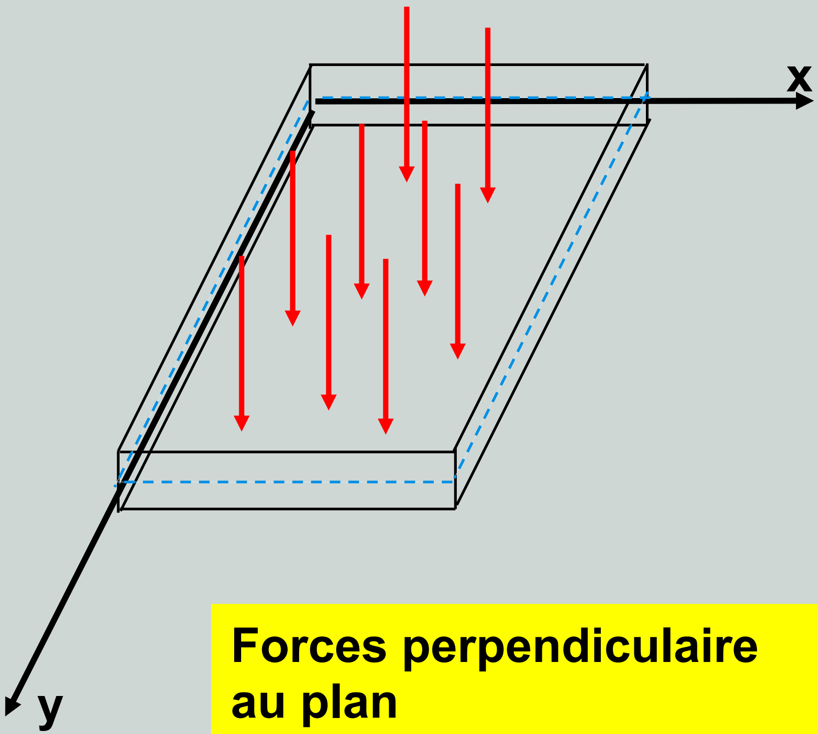
ATTENTION !!!

A ne pas confondre



Forces dans le plan

Contrainte Plane

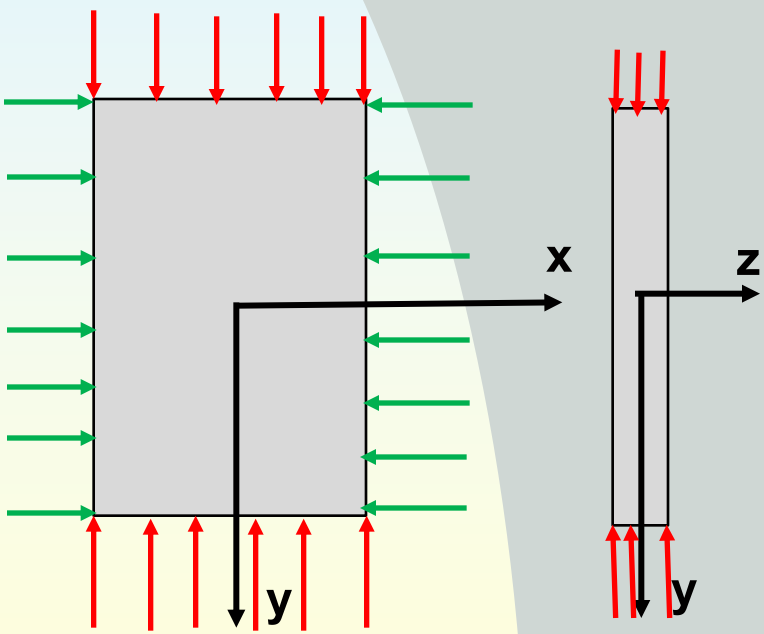


Forces perpendiculaire au plan

Flexion de Plaque

3. Contrainte Plane

Par conséquent pour chaque plan « z=Cte », le déplacement est le même et localisé dans ce plan, et que les composantes des contraintes $\sigma_z; \ \tau_{xz} \ et \ \tau_{yz}$ sont nulles sur tous les plans à travers l'épaisseur et que les composantes $\sigma_x; \sigma_y \ et \ \tau_{xy}$ sont indépendantes de « z » (i.e restent constantes en tout point de l'épaisseur de la plaque.



On aura donc

$$\sigma_x(x,y); \sigma_y(x,y);$$
$$\tau_{xy}(x,y)$$
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

3. Contrainte Plane

Donc puisqu'on a

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

Or $\sigma_z = 0$ **Alors**

$$\varepsilon_z = \frac{-\vartheta}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Il faut faire attention:

Dans le cas de la contrainte plane, la 3ème déformation n'est pas nulle

3. Contrainte Plane

Les inconnues

Contraintes (03)

$\sigma_x(x,y)$; $\sigma_y(x,y)$;

$\tau_{xy}(x,y)$

Déformations (03)

$\varepsilon_x(x,y)$; $\varepsilon_y(x,y)$;

$\gamma_{xy}(x,y)$

Déplacements (02)

$u(x,y)$;

$v(x,y)$

08 inconnues

08 équations

3. Contrainte Plane

a) Equations de l'étude statique (02)

i) Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

ii) Conditions aux limite

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

3. Contrainte Plane

b) Equations de l'étude géométrique (03)

i) Equations de Cauchy (Extensions et distorsions)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ii) Equations de compatibilité (St Venant)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y}$$

3. Contrainte Plane

c) Equations de l'étude physique (03)

i) Equations de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \vartheta\sigma_y\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \vartheta\sigma_x\right]$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\vartheta)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

ii) Equations de Lamé

$$\sigma_x = 2G.\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v$$
$$\sigma_y = 2G.\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v$$
$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{\vartheta}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Différence entre Contrainte Plane et Déformation

La seule différence réside dans les équations de Hooke

La contrainte plane — **E et ϑ**

La déformation plane — **E_1 et ϑ_1**

3. Contrainte Plane

Tenseurs

i) Tenseur des Contraintes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Tenseur des Déformations

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}.\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}.\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\vartheta}{E}.(\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix}$$

4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

Le but est de combiner les 08 équations de l'élasticité plane (Contrainte ou déformation plane) et exprimer la combinaison en déplacements uniquement

Alors on peut parler de

Solution en Déplacements

4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

i) Déformation Plane

On exprime les équations d'équilibre en fonction des déplacements.

Soit

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Or d'après les équations de Lamé

$$\sigma_x = (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y$$
$$\sigma_y = (2G + \lambda)\varepsilon_y + \lambda \varepsilon_x$$
$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$$

En remplaçant, on aura

$$(2G + \lambda)\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \lambda.\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + G.\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + X = 0$$
$$G.\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + (2G + \lambda)\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \lambda.\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + Y = 0$$

4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

i) Déformation Plane

$$(2G+\lambda)\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}+\lambda.\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y}+G.\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}+X=0$$
$$G.\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}+(2G+\lambda)\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}+Y=0$$

Or, par compatibilité, on a

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\tau_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

En remplaçant on aura

$$(2G+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda.\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+G.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+G.\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+X=0$$
$$G.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+G.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(2G+\lambda)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+Y=0$$

4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

i) Déformation Plane

$$(2G+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda.\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+G.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+G.\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+X=0$$

$$G.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+G.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(2G+\lambda)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+Y=0$$

En réarrangeant les termes on trouvera les équations d'élasticité plane en déplacements dans le cas de la déformation plane

$$G.\nabla^2 u+(G+\lambda).\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}+X=0$$

$$G.\nabla^2 v+(G+\lambda).\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y}+Y=0$$

Avec:

∇: Laplacien $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y}$

Et $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

ii) Contrainte Plane

On refait la même chose pour le cas de la contrainte plane, en utilisant les équations correspondantes, on obtient

$$G.\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\vartheta)}.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + X = 0$$

$$G.\nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\vartheta)}.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + Y = 0$$

Avec:

∇: Laplacien $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y}$

Et $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

5. Equations fondamentales exprimées en Contraintes

Le but est de combiner les 08 équations de l'élasticité plane (Contrainte ou déformation plane) et exprimer la combinaison en contraintes uniquement

Alors on peut parler de

Solution en Forces

5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

i) Contrainte en Plane

On exprime les équations de contrainte plane en contrainte.

Soit
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \vartheta \sigma_y\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \vartheta \sigma_x\right]$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\vartheta)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

En remplaçant, on aura

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \vartheta \sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \vartheta \sigma_x\right) = 2(1+\vartheta)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}} \qquad (1)$$

5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

i) Contrainte en Plane

Or d'après les équations d'équilibre on aura:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \text{\% x}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \qquad \text{\% y}$$

On dérive la 1ère par rapport à « x » et la 2ème par rapport à « y », on aura

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Les forces de volume sont quelconques

5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

i) Contrainte en Plane

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

En faisant la somme membre à membre des équations (2) on aura :

$$2.\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad (3)$$

On remplace (3) dans (1), on aura

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \vartheta \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \vartheta \sigma_x) = 2(1+\vartheta)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\vartheta).\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

i) Contrainte en Plane

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-(1+\vartheta).\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Sachant que :

$$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

On aura l’équation de la contrainte plane exprimée en contrainte. Soit

$$\nabla^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-(1+\vartheta).\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ces équations sont appelées Equations de LEVY

5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

ii) Déformation en Plane

Pour la cas de la déformation plane, on fera la même démonstration, on aura l'équation de déformation plane exprimée en contrainte. Soit

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\vartheta} \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Qui peut s'écrire sous la forme

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\vartheta_1) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Avec $\vartheta_1 = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}.$

Ces équations sont appelées Equations de LEVY

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

La solution d'un problème plan se réduit à l'intégration des équations différentielles (équilibre, compatibilité et Hooke) ainsi que les équations de conditions aux limites

En pratique, les forces de volume sont le poids propre, dont les composantes peuvent être:

$$X = 0$$
$$Y = \rho . g$$

Et comme la combinaison des équations nous a donné:

Contrainte Plane $$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\vartheta).\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Déformation Plane $$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\vartheta_1).\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

On aura pour les 02 cas: $$\boxed{\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0} \qquad (4)$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad (4)$$

Ainsi si on trouve une solution σ_x et σ_y de l'équation (4) ça sera la solution exacte

Pour cela, on revient aux équations d'équilibre, on aura

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho . g = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

C'est un système de 02 équations différentielles à 02 inconnues.

Solution Particulière

+

Solution Homogène

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\rho . g$$

Solution Particulière

Plusieurs possibilités

i) $\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_y = -\rho . g . y$

ii) $\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tau_{xy} = -\rho . g . x$ **(6)**

Solution Homogène

Trouver la solution sans second membre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

Solution Homogène

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

Pour trouver la solution de ce système, Mr Airy a proposé des fonctions de contraintes

Ainsi, pour satisfaire la 1ère équation du système (7), On choisit une fonction $\psi(x, y)$ telle que

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \quad et \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \qquad (8)$$

et, pour satisfaire la 2ème équation du système (7), On choisit aussi une fonction $\chi(x, y)$ telle que

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} \quad et \quad \sigma_y = -\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} \qquad (9)$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} \quad et \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} \qquad (8)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \quad et \quad \sigma_x = -\frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \qquad (9)$$

Comme il s'agit du même τ_{xy} dans les équations (8) et (9), on aura:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \quad d'où$$

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \qquad (10)$$

On trouvera une équation similaire aux 02 autres

Pour satisfaire cette équation (10), On choisit aussi une autre fonction $\varphi(x,y)$ telle que

$$\psi(x,y) = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \quad et \quad \chi(x,y) = -\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \qquad (11)$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} \quad et \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} \tag{8}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \quad et \quad \sigma_x = -\frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \tag{9}$$

$$\psi(x,y) = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \quad et \quad \chi(x,y) = -\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \tag{11}$$

En remplaçant (11) dans (8) et (9), on obtient toutes les contraintes inconnues

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = -\frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2} \tag{12}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x \partial y}$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

Ainsi la solution générale

Solution Particulière

+

Solution Homogène

On associera une des équations (6) avec les équations (12). On aura

Solution Générale

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2} \qquad (13)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x \partial y} - \rho . g . x$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x \partial y} - \rho.g.x$$

Or pour que la solution soit exacte, il faut qu'elle vérifie l'équation générale en contraintes (4)

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

En remplaçant, on aura

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0 \qquad (14)$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x \partial y} - \rho . g . x$$

En final, on aura

$$\frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

$$\nabla^4\left(\varphi(x,y)\right) = 0 \qquad (15)$$

En résumé

Tout le problème de l'élasticité plane, lorsque le poids propre est la seule force de volume (contrainte et déformation plane) revient à trouver une fonction $\varphi(x,y)$ qui satisfait les équations (14) ou (15).

Avec $\varphi(x,y)$, on calcule les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} (Eqs 13) puis on doit vérifier toutes les conditions aux limites.

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

Procédure

i) Trouver $\varphi(x, y)$ solution de l'équation (14) ou (15)

$$\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0 \qquad (14)$$

$$\nabla^4\big(\varphi(x,y)\big) = 0 \qquad (15)$$

ii) Calculer les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} en utilisant les équations (13)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y} - \rho.g.x$$

iii) Vérifier toutes les conditions aux limites (de toutes les faces).

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

7. Solution du problème plan par les polynômes

Un nombre important de problème a été résolu en utilisant des fonctions $\varphi(x, y)$ de type polynôme.

Comment construire un polynôme ? En utilisant le triangle de Pascal

			1				**Degré 0**
		x		y			**Degré 1**
	x^2		$x.y$		y^2		**Degré 2**
x^3		$x^2.y$		$x.y^2$		y^3	**Degré 3**

Exemple Polynôme de degré « 2 »

$$\varphi_2(x, y) = a.x^2 + b.x.y + c.y^2$$

Exemple Polynôme de degré « 3 »

$$\varphi_3(x, y) = a.x^3 + b.x^2.y + c.x.y^2 + d.y^3$$

7. Solution du problème plan par les polynômes

i) Solution par polynôme du 2ème degré

Soit le polynôme

$$\varphi_2(x,y) = \frac{a_2}{2}.x^2 + b_2.x.y + \frac{c_2}{2}.y^2$$

On négligera le poids propre

∀ les constantes a_2 ; b_2 et c_2 l'équation

$$\nabla^4\left(\varphi_2(x,y)\right) = \frac{\partial^4\varphi_2(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi_2(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi_2(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

Est toujours vérifiée

On dit que la fonction $\varphi_2(x,y)$ est Bi-harmonique

7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\varphi_2(x,y) = \frac{a_2}{2}.x^2 + b_2.x.y + \frac{c_2}{2}.y^2$$

Avec cette fonction, on peut déterminer la distribution des contraintes

On négligera le poids propre

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} = c_2$$

Traction/compression

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} = a_2$$

Traction/compression

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x \partial y} - \cancelto{0}{\rho.g.x} = -b_2$$

Cisaillement simple

On remarque que la fonction représente la combinaison d'une traction/compression suivant « x » et « y » et un cisaillement dans le plan « xy »

7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\sigma_x = c_2$$
$$\sigma_y = a_2$$
$$\tau_{xy} = -b_2$$

iii) Vérification de toutes les conditions aux limites

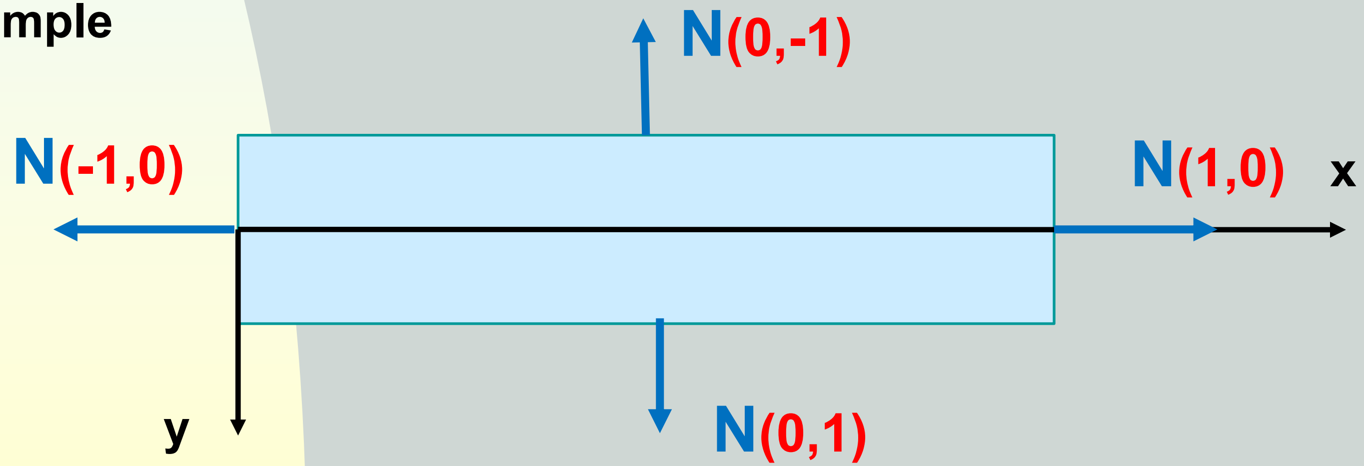
$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

Avec nos contraintes, on aura

$$\bar{X} = l.c_2 - m.b_2$$
$$\bar{Y} = -l.b_2 + m.a_2$$

Il suffit maintenant considérer toutes les faces

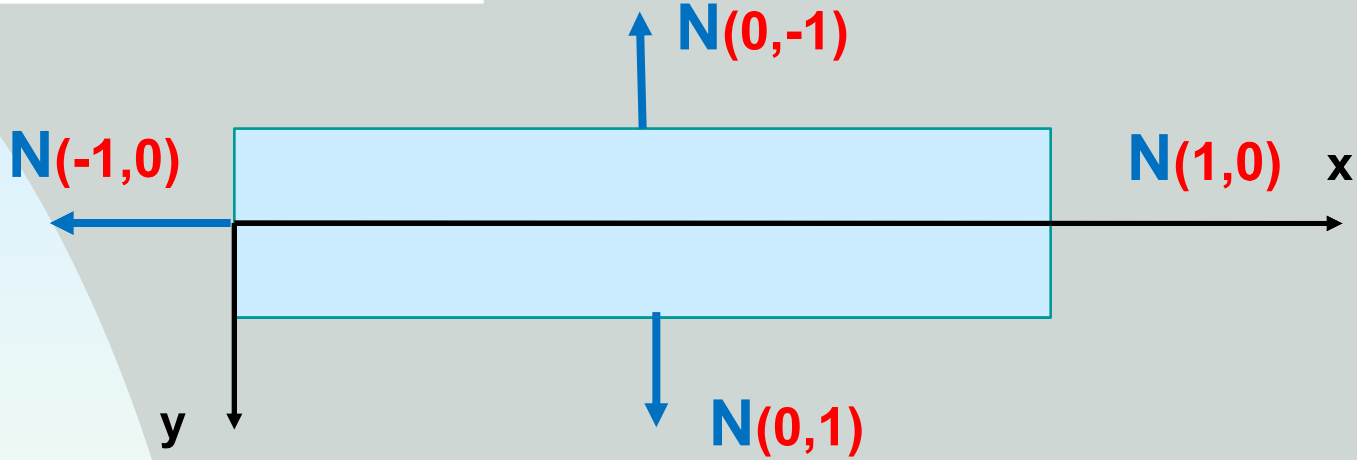
exemple



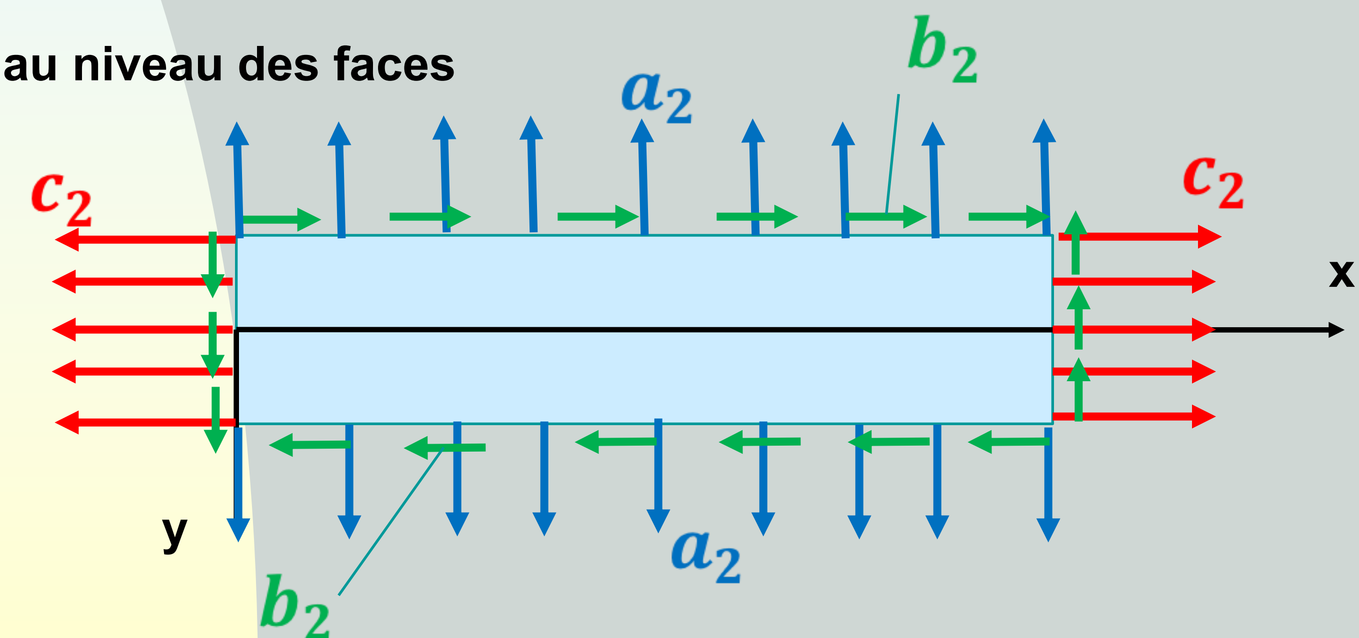
7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\varphi_2(x,y) = \frac{a_2}{2}.x^2 + b_2.x.y + \frac{c_2}{2}.y^2$$

$$\bar{X} = l.c_2 - m.b_2$$
$$\bar{Y} = -l.b_2 + m.a_2$$



On aura au niveau des faces



7. Solution du problème plan par les polynômes

ii) Solution par polynôme du 3ème degré

Soit le polynôme

$$\varphi_3(x,y) = \frac{a_3}{6}.x^3 + \frac{b_3}{2}.x^2.y + \frac{c_3}{2}.x.y^2 + \frac{d_3}{6}.y^3$$

On négligera le poids propre

∀ les constantes a_3, b_3, c_3, d_3 l'équation

$$\nabla^4\varphi_3(x,y) = \frac{\partial^4\varphi_3(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi_3(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi_3(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

Est toujours vérifiée

On dit que la fonction $\varphi_2(x,y)$ est **Bi-harmonique**

7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\varphi_3(x,y) = \frac{a_3}{6}.x^3 + \frac{b_3}{2}.x^2.y + \frac{c_3}{2}.x.y^2 + \frac{d_3}{6}.y^3$$

Avec cette fonction, on peut déterminer la distribution des contraintes

On négligera le poids propre

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_3(x,y)}{\partial y^2} = c_3.x + d_3.y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_3(x,y)}{\partial x^2} = a_3.x + b_3.y$$

0

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_3(x,y)}{\partial x \partial y} - \rho.g.x = -b_3.x - c_3.y$$

7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\sigma_x = c_3.x + d_3.y$$
$$\sigma_y = a_3.x + b_3.y$$
$$\tau_{xy} = -b_3.x - c_3.y$$

iii) Vérification de toutes les conditions aux limites

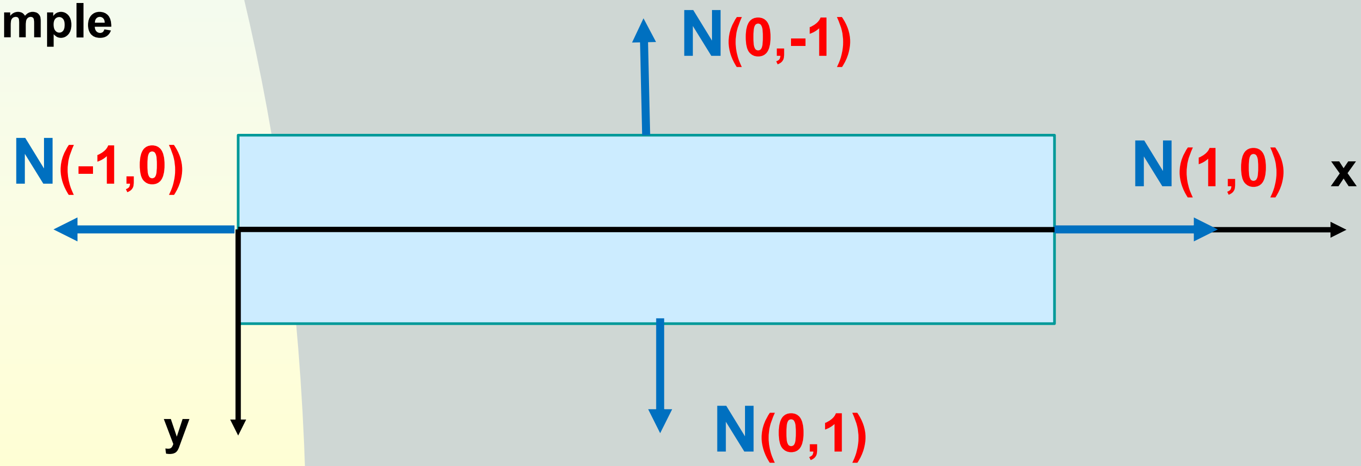
$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

Avec nos contraintes, on aura

$$\bar{X} = (c_3.x + d_3.y).l - (b_3.x + c_3).m$$
$$\bar{Y} = -(b_3.x + c_3).l + (a_3.x + b_3.y).m$$

Il suffit maintenant considérer toutes les faces

exemple



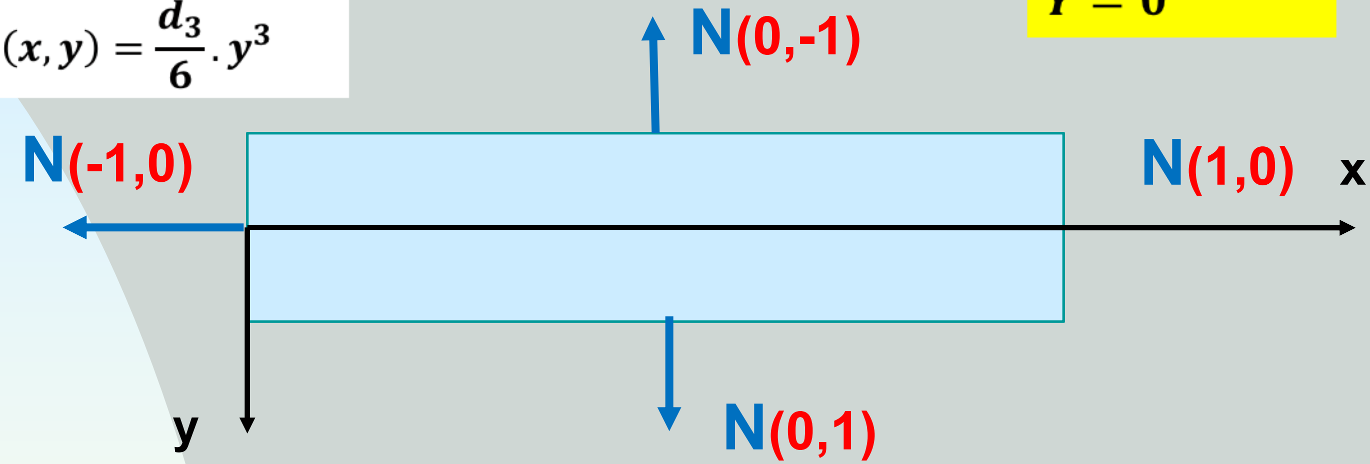
7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\bar{X} = (c_3.x + d_3.y).l - (b_3.x + c_3).m$$
$$\bar{Y} = -(b_3.x + c_3).l + (a_3.x + b_3.y).m$$

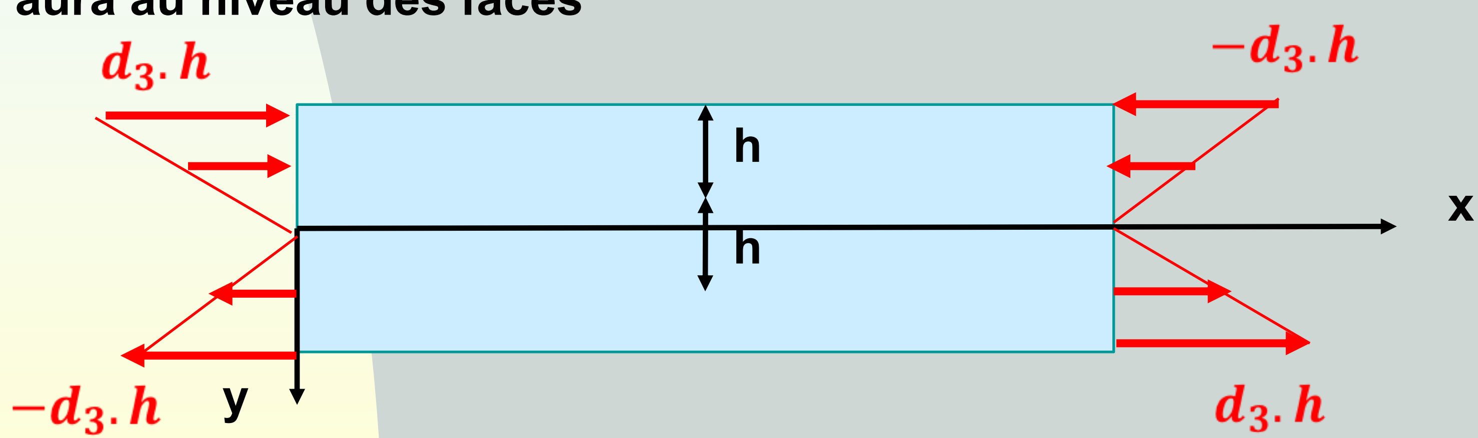
Cas 1: Cas particulier $a_3, b_3, c_3 = 0 \quad ; d_3 \neq 0$

$$\bar{X} = (d_3.y).l$$
$$\bar{Y} = 0$$

$$\varphi_3(x,y) = \frac{d_3}{6}.y^3$$



On aura au niveau des faces



Flexion Suivant « x »

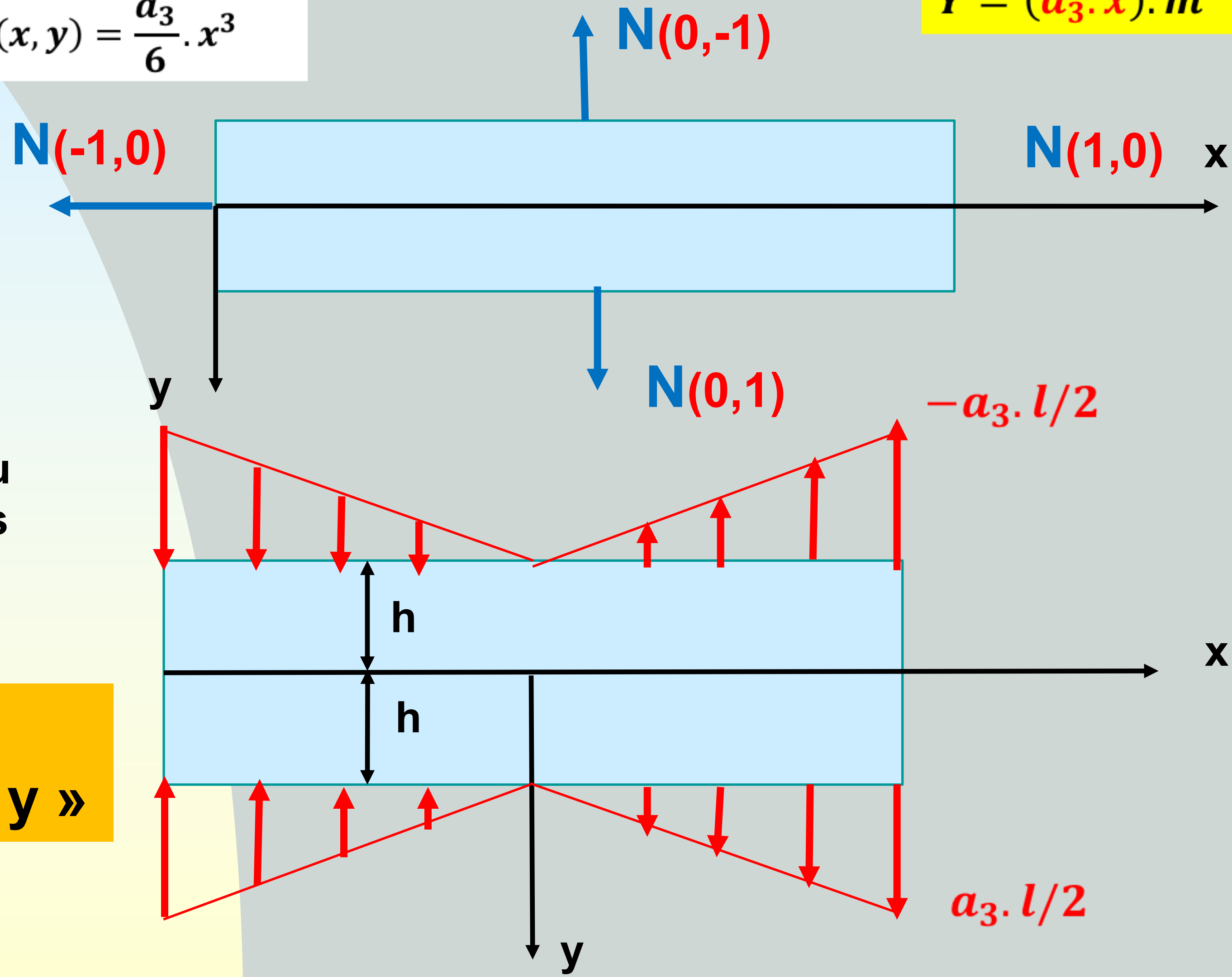
7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\bar{X} = (c_3.x + d_3.y).l - (b_3.x + c_3).m$$
$$\bar{Y} = -(b_3.x + c_3).l + (a_3.x + b_3.y).m$$

Cas 2: Cas particulier $b_3, c_3, d_3 = 0 \quad ; a_3 \neq 0$

$$\bar{X} = 0$$
$$\bar{Y} = (a_3.x).m$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{a_3}{6}.x^3$$



On aura au niveau des faces

Flexion Suivant « y »

7. Solution du problème plan par les polynômes

Récapitulatif

$$\varphi(x,y) = a.x^2$$

Traction/compression suivant « y »

$$\varphi(x,y) = a.y^2$$

Traction/compression suivant « x »

$$\varphi(x,y) = a.x.y$$

Cisaillement Simple

$$\varphi(x,y) = a.x^3$$

Flexion suivant « y »

$$\varphi(x,y) = a.y^3$$

Flexion suivant « x »

On peut combiner les fonctions pour avoir les autres états, flexion composée, flexion déviée, flexion + cisaillement, ….

Merci. **Fin du chapitre 6**

Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Applications