# Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

## Application 8

# Elasticité Plane

## Poutre Simplement Appuyée

**COURS 10** Mardi 28.04.2020

# Application

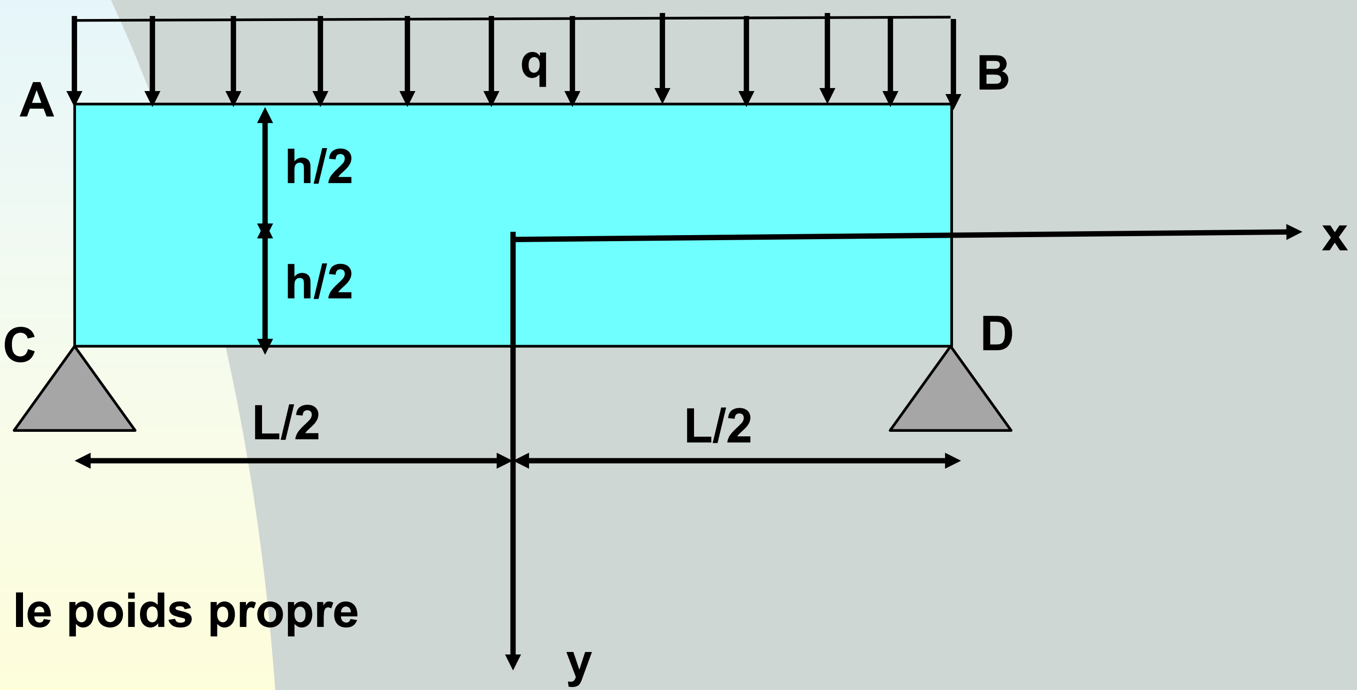
Le but de cette application est d'appliquer les principes de l'élasticité plane pour une poutre en utilisant la notion de la fonction d'Airy, pour montrer la simplicité de la solution.

Les résultats seront comparés à ceux de la théorie des poutres classique.

# Application

**Une poutre rectangulaire de longueur « L » de hauteur « h » et de largeur unité, simplement appuyée aux extrémités « $x = \pm L/2$ », est soumise à une charge uniformément répartie « q ».**

**Pour étudier la distribution des contraintes en tout point M(x,y) de cette poutre on se donne la fonction suivante:**




**On néglige le poids propre**

**Rem: Ce sont toutes les faces AC et BD qui sont simplement appuyées**

# Application

Pour étudier la distribution des contraintes en tout point M(x,y) de cette poutre on se donne la fonction suivante:

$$\varphi(x,y) = \frac{a}{6}.y^3\left(x^2 - \frac{y^2}{5}\right) + \frac{b}{2}.x^2.y + \frac{c}{6}.y^3 + \frac{d}{2}.x^2$$

i) Montrer que cette fonction est bi-harmonique

ii) Déterminer les constantes a, b, c et d pour que l'équilibre global de cette poutre vérifiée.

iii) Déterminer le vecteur déplacement (u,v) en tout point M(x,y) de cette poutre. En déduire la flèche maximale.

iv) Comparer cette flèche avec celle donnée par la RDM classique (théorie des poutres). Commenter la comparaison

# Application

**Pour que $\varphi(x,y)$ soit une fonction d'Airy, il faut 03 conditions**

**i) Il faut qu'elle vérifie l'équation bi-harmonique.**

$$\nabla^4\varphi(x,y) = \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

**ii) Il faut que la fonction donne une distribution de contraintes**

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y} - \rho.g.x$$

**iii) Il faut que la distribution de contraintes vérifie toutes les conditions aux limites**

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

# Application

**i) Il faut qu'elle vérifie l'équation bi-harmonique.**

$$\nabla^4\varphi(x,y) = \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

**avec** $$\varphi(x,y) = \frac{a}{6}.y^3\left(x^2 - \frac{y^2}{5}\right) + \frac{b}{2}.x^2.y + \frac{c}{6}.y^3 + \frac{d}{2}.x^2$$

$$\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} = 0 \qquad \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} = 2.a.y \qquad \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = -4.a.y$$

**D'où**

$$\nabla^4\varphi(x,y) = 0 + 2.(2.a.y) + (-4.a.y) = 0$$

**Est vérifiée**

**La fonction $\varphi(x,y)$ est bi-harmonique.**

# Application

$$\varphi(x,y) = \frac{a}{6}.y^3\left(x^2 - \frac{y^2}{5}\right) + \frac{b}{2}.x^2.y + \frac{c}{6}.y^3 + \frac{d}{2}.x^2$$

**ii) Il faut que la fonction donne une distribution de contraintes**

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} = a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} = \frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y} - \cancelto{0}{\rho.g.x} = -a.x.y^2 - b.x$$

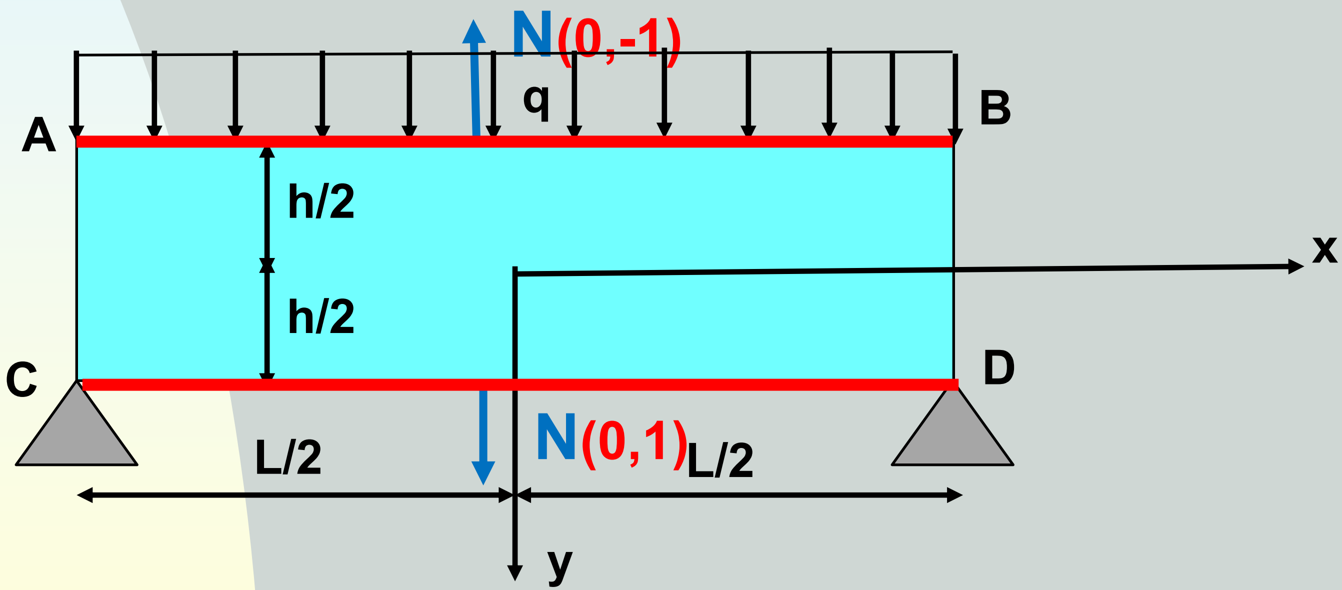
**On néglige le poids propre**

# Application

iii) Il faut que la distribution de contraintes vérifie toutes les conditions aux limites

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

Rem: Il n ya que les **faces AB et CD** qu'il faut vérifier les conditions aux limites de chargement (elles peuvent recevoir des charges extérieures de surface




Rem: les **faces AC et BD**, conditions aux limites de déplacements (sont simplement appuyées et ne peuvent pas avoir des charges extérieures de surface

# Application

**Avec les distributions de contraintes**

$$\sigma_x = a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y$$

$$\sigma_y = \frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d$$

$$\tau_{xy} = -a.x.y^2 - b.x$$

**Les équations de conditions aux limites seront:**

$$\bar{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$

$$\bar{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

# Application

$$\overline{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$

$$\overline{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

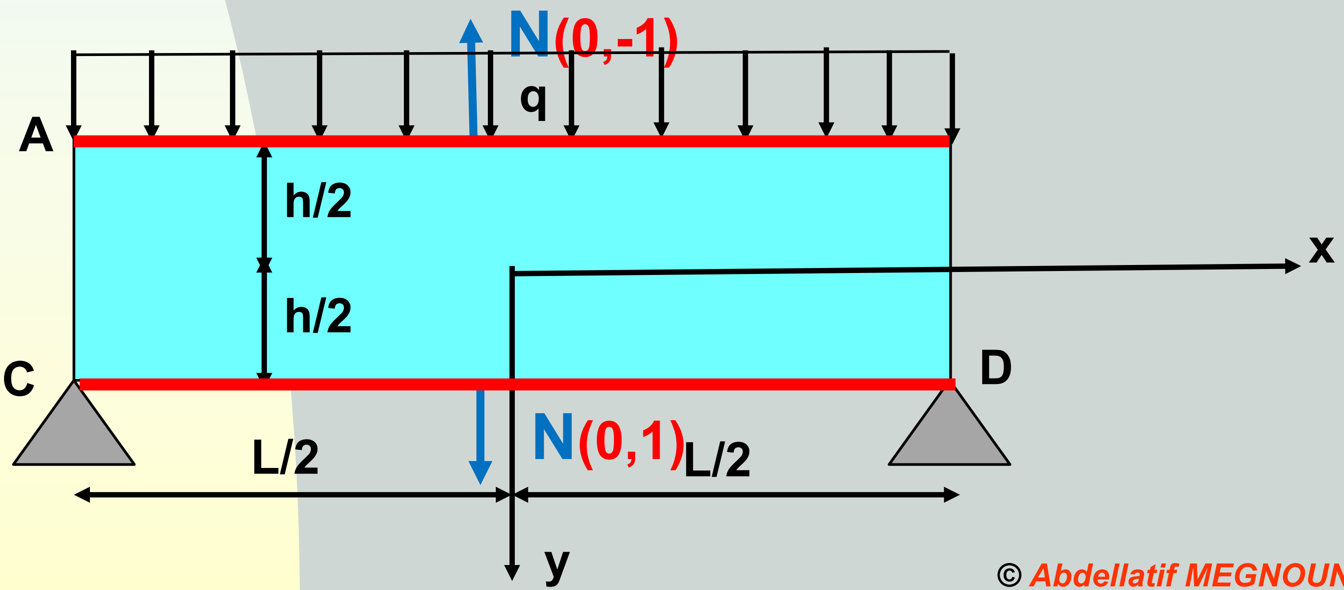
**Face AB : (l,m)=(0,-1) et y=-h/2**

$$\overline{X} = -1.\left(-a.x.\left(-\frac{h}{2}\right)^2 - b.x\right) = 0$$

$$\overline{Y} = -1.\left(\frac{1}{3}.a.\left(-\frac{h}{2}\right)^3 + b.\left(-\frac{h}{2}\right) + d\right) = -q$$

$$a\frac{h^2}{4} + b = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{a}{3}.\frac{h^3}{8} + b.\frac{h}{2} - d = q \qquad (2)$$



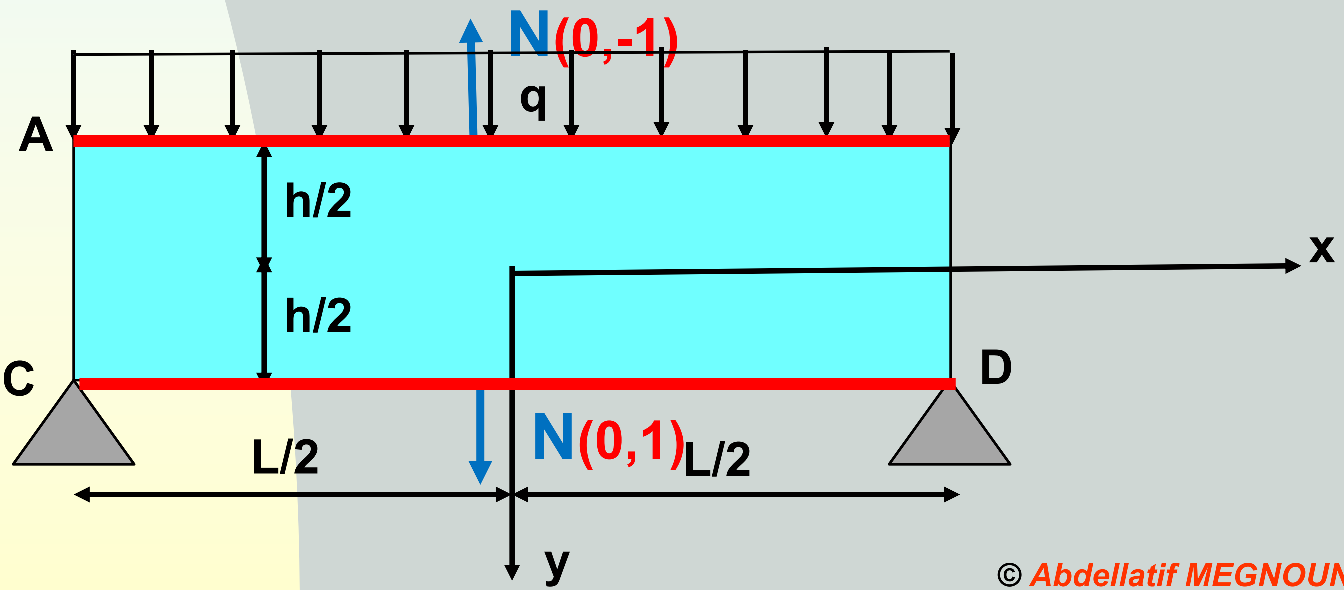
# Application

$$\bar{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$
$$\bar{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

**Face CD : (l,m)=(0,1) et y=h/2**

$$\bar{X} = 1.\left(-a.x.\left(\frac{h}{2}\right)^2 - b.x\right) = 0$$
$$\bar{Y} = 1.\left(\frac{1}{3}.a.\left(\frac{h}{2}\right)^3 + b.\left(\frac{h}{2}\right) + d\right) = 0$$

$$a\frac{h^2}{4} + b = 0 \qquad (3)$$
$$\frac{a}{3}.\frac{h^3}{8} + b.\frac{h}{2} + d = 0 \qquad (4)$$



# Application

Ainsi on obtient 03équations à 03 inconnues (a, b, et d)

$$a\frac{h^2}{4}+b=0 \quad (1)$$

$$\frac{a}{3}.\frac{h^3}{8}+b.\frac{h}{2}-d=q \quad (2)$$

$$a\frac{h^2}{4}+b=0 \quad (3)$$

$$\frac{a}{3}.\frac{h^3}{8}+b.\frac{h}{2}+d=0 \quad (4)$$

(1) et (3) : Mêmes équations

La résolution de ces équations nous donne:

$$a=-\frac{6.q}{h^3} \qquad b=\frac{3.q}{2.h} \qquad d=-\frac{q}{2}$$

Reste la constante « c », on la détermine par l'équilibre global de la poutre

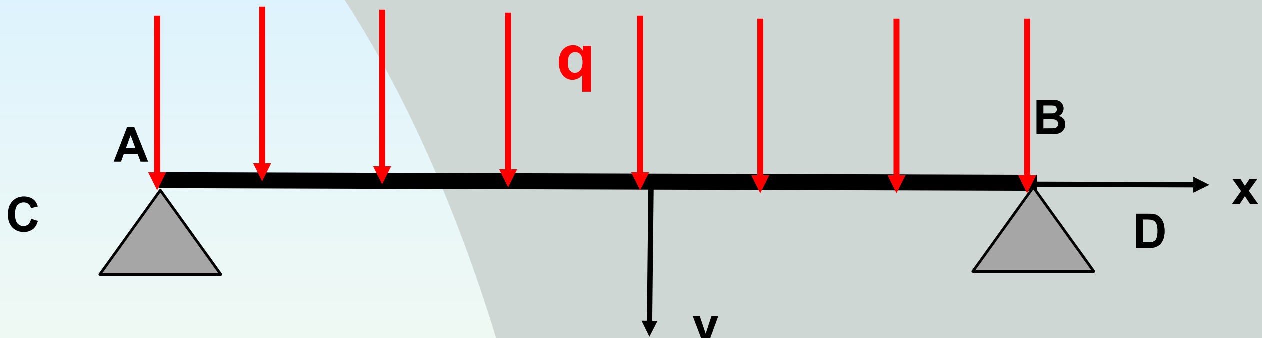
## Application

$$\bar{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$

$$\bar{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

**Déterminons « c » ?**

**On sait par la RDM qu'au niveau des appuis on devrait avoir**




$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad N_x = 0$$ **(Effort normal)**

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad T_x = -q.L/2$$ **(Effort tranchant)**

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad M_x = 0$$ **(Moment fléchissant)**

**Schéma statique équivalent: poutre simplement appuyée soumise à une charge uniforme**

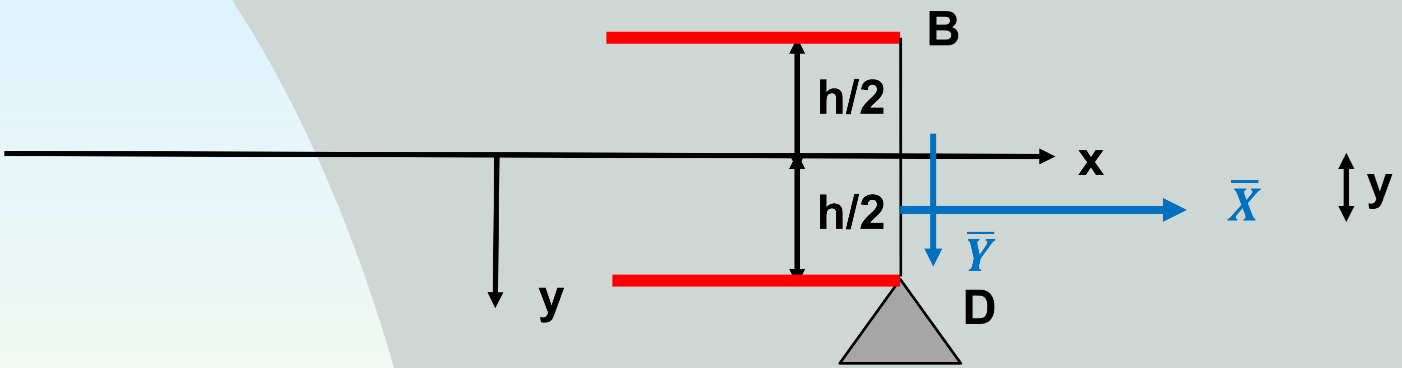
## Application

$$\bar{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$

$$\bar{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

**Or par l'élasticité plane**

**Exemple face BC (L,M)=(1,0) et x=L/2 et** $-h/2 < y < h/2$




$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{X}.dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x.dy = 0$$ (5) **(Effort normal)**

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Y}.dy = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}.dy = -q.L/2$$ (6) **(Effort tranchant)**

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad M_z = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{X}.y.dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x.y.dy = 0$$ (7) **(Moment fléchissant)**

# Application

$$\bar{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$

$$\bar{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{X}.dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x.dy = 0 \qquad (5)$$

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \left(a.\frac{L^2}{4}.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right).dy$$

$$N_x = a.\frac{L^2}{4}\frac{y^2}{2}\Big|_{-h/2}^{h/2} - \frac{2}{3}.a.\frac{y^4}{4}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + c\frac{y^2}{2}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$$

**Vérifiée**

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Y}.dy = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}.dy = -q.L/2 \qquad (6)$$

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \left(-a.x.y^2 - b.x\right).dy = -a.\frac{L}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \mathrm{b}.\frac{L}{2}y\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = -a.\frac{L.h^3}{24} - b.\frac{L.h}{2}$$

**Avec** $a = -\frac{6.q}{h^3}$ $\quad b = \frac{3.q}{2.h}$

$$T_x = -a.\frac{L.h^3}{24} - b.\frac{L.h}{2} = -q.L/2$$

**Vérifiée**

# Application

$$\overline{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$

$$\overline{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

**Il nous reste l'équation du moment fléchissant**

**(7)** $$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad M_z = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{X}.y.dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x.y.dy = 0$$

$$x = \pm\frac{L}{2} \quad ; \quad M_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x.y.dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right).y.dy = 0$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right).y.dy = -a.\frac{L^2}{4}\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \frac{2}{3}.a\left.\frac{y^5}{5}\right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + c\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$= -\frac{q}{2}.\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{q}{20}.(h)^2 + c.\frac{h^3}{12} = 0$$

**D'où:** $$\boxed{c = \frac{q}{2.I_z}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{10}\right)}$$

**avec** $I_z = \dfrac{h^3}{12}$ **Moment d'inertie de la poutre**

# Application

$$\bar{X} = l.\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) + m.\left(-a.x.y^2 - b.x\right)$$

$$\bar{Y} = l.\left(-a.x.y^2 - b.x\right) + m.\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)$$

**iii) Calcul des déplacements**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] = \frac{1}{E}\left[\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right) - \nu\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right)\right]$$

**D'où**

$$u(x,y = \int \varepsilon_x dx = \frac{1}{E}\left[\left(a.\frac{x^3}{3}.y - \frac{2}{3}.a.x.y^3 + c.x.y\right) - \nu\left(\frac{1}{3}.a.x.y^3 + b.x.y + d.x\right)\right] + u_0(y)$$

**et**

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right] = \frac{1}{E}\left[\left(\frac{1}{3}.a.y^3 + b.y + d\right) - \nu\left(a.x^2.y - \frac{2}{3}.a.y^3 + c.y\right)\right]$$

**D'où**

$$\mathrm{v}(x,y = \int \varepsilon_y dy = \frac{1}{E}\left[\left(\frac{1}{3}.a.\frac{y^4}{4} + b.\frac{y^2}{2} + d.y\right) - \nu\left(a.x^2.\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}.a.\frac{y^4}{4} + c.\frac{y^2}{2}\right)\right] + v_0(x)$$

**or**

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

# Application

$$u(x, y = \int \varepsilon_x dx = \frac{1}{E}\left[\left(a.\frac{x^3}{3}.y - \frac{2}{3}.a.x.y^3 + c.x.y\right) - \nu\left(\frac{1}{3}.a.x.y^3 + b.x.y + d.x\right)\right] + u_0(y)$$

$$\mathrm{v}(x, y = \int \varepsilon_y dy = \frac{1}{E}\left[\left(\frac{1}{3}.a.\frac{y^4}{4} + b.\frac{y^2}{2} + d.y\right) - \nu\left(a.x^2.\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}.a.\frac{y^4}{4} + c.\frac{y^2}{2}\right)\right] + v_0(x)$$

soit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{E}\left[\left(a.\frac{x^3}{3} - 2.a.x.y^2 + c.x\right) - \nu\left(a.x.y^2 + b.x\right)\right] + \frac{\partial u_0(y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[-\nu\left(a.x.y^2\right)\right] + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x}$$

En remplaçant dans

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

On aura

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = -\frac{2.(1+\vartheta)}{E}b.x - \frac{1}{E}\left[\frac{a.x^3}{3} + c.x - \vartheta.b.x\right]$$

# Application

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = -\frac{2.(1+\vartheta)}{E} b.x - \frac{1}{E}\left[\frac{a.x^3}{3} + c.x - \vartheta.b.x\right]$$

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = -\frac{1}{E}\left[2.b.x + \vartheta.b.x + \frac{a.x^3}{3} + c.x\right]$$

**Par identification**

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = -\frac{1}{E}\left[2.b.x + \vartheta.b.x + \frac{a.x^3}{3} + c.x\right]$$

**En intégrant, on aura**

$$u_0(y) = c_1$$

$$v_0(x) = -\frac{1}{E}\left[b.x^2 + \vartheta.b.\frac{x^2}{2} + \frac{c.x^2}{2} + a.\frac{x^4}{12}\right] + c_2$$

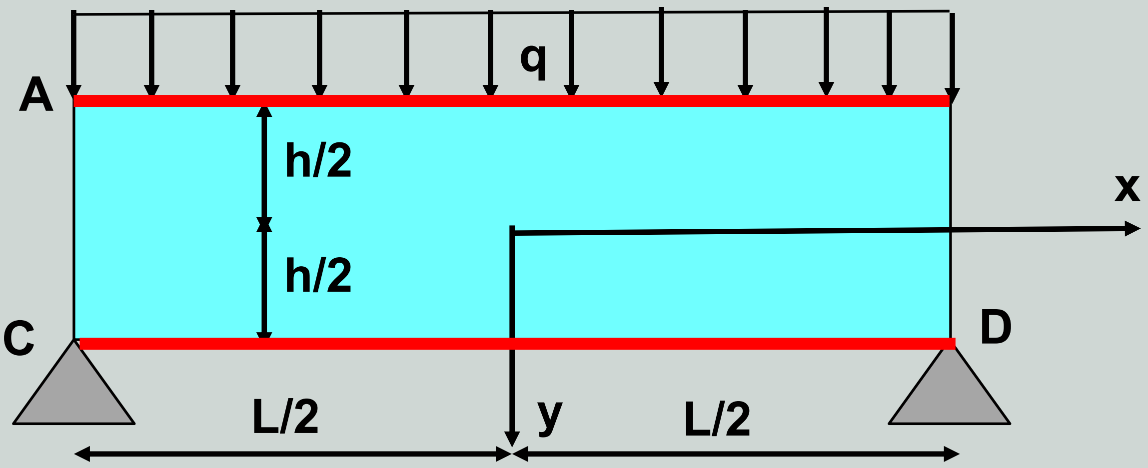
## Application

**Ainsi, en remplaçant dans u et v, on aura**

$$u(x,y)=\frac{1}{E}\left[\left(a.\frac{x^3}{3}.y-\frac{1}{3}.a.x.y^3(2+\vartheta)+x.y(c-\vartheta.b)\right)-\nu.d.x\right]+c_1$$

$$\mathrm{v}(x,y)=\frac{1}{E}\left[\left(\frac{1}{3}.a.\frac{y^4}{4}+b.\frac{y^2}{2}+d.y\right)-\nu\left(a.x^2.\frac{y^2}{2}-\frac{2}{3}.a.\frac{y^4}{4}+c.\frac{y^2}{2}\right)-\left(b.x^2+\vartheta.b.\frac{x^2}{2}+\frac{c.x^2}{2}+a.\frac{x^4}{12}\right)\right]+c_2$$

**Calcul de la flèche maximale**




**Equation de la ligne élastique c'est la valeur de v(x,o) (à l'axe neutre**

$$\mathrm{v}(x,0)=\frac{1}{E}\left[-\left(b.x^2+\vartheta.b.\frac{x^2}{2}+\frac{c.x^2}{2}+a.\frac{x^4}{12}\right)\right]+c_2$$

**Il faut calculer $c_2$ par les conditions aux limites de déplacements**

## Application

$$v(x,0)=\frac{1}{E}\left[-\left(b.x^2+\vartheta.b.\frac{x^2}{2}+\frac{c.x^2}{2}+a.\frac{x^4}{12}\right)\right]+c_2$$

**Il faut calculer $c_2$ par les conditions aux limites de déplacements**

**Aux appuis le déplacement vertical est nul. Soit:**

$$v\left(\pm\frac{L}{2},0\right)=\frac{1}{E}\left[-\left(b.x^2+\vartheta.b.\frac{x^2}{2}+\frac{c.x^2}{2}+a.\frac{x^4}{12}\right)\right]+c_2=0$$

$$v\left(\pm\frac{L}{2},0\right)=\frac{1}{E}\left[-\left(b.\left(\frac{L}{2}\right)^2+\vartheta.b.\frac{L^2}{8}+\frac{c.L^2}{8}+a.\frac{L^4}{12.16}\right)\right]+c_2=0$$

**D'où**

$$c_2=\frac{1}{E}\left[\left(b.\left(\frac{L}{2}\right)^2+\vartheta.b.\frac{L^2}{8}+\frac{c.L^2}{8}+a.\frac{L^4}{12.16}\right)\right]$$

# Application

$$\mathrm{v}(x,0)=\frac{1}{E}\left[-\left(b.x^2+\vartheta.b.\frac{x^2}{2}+\frac{c.x^2}{2}+a.\frac{x^4}{12}\right)\right]+c_2$$

**En remplaçant $c_2$ dans l'expression de la ligne élastique, on aura:**

$$\mathrm{v}(x,0)=\frac{1}{E}\left[-\left(b.\left(x^2-(L/2)^2\right)+\vartheta.\frac{b}{2}\left(x^2-(L/2)^2\right)+\frac{c}{2}\left(x^2-(L/2)^2\right)+\frac{a}{12}\left(x^4-(L/2)^4\right)\right)\right]$$

**Et la flèche maximale, sera:**

$$\mathrm{v}(0,0)=\frac{1}{E}\left[-\left(b.\left(-(L/2)^2\right)+\vartheta.\frac{b}{2}\left(-(L/2)^2\right)+\frac{c}{2}\left(-(L/2)^2\right)+\frac{a}{12}\left(-(L/2)^4\right)\right)\right]$$

**Avec les valeurs de a, b et c, on aura:**

$$v_{max}=v(0,0)=\frac{1}{E}\left[\frac{3.qL^2}{8h}+\vartheta\frac{3.qL^2}{16h}+\frac{3.qL^4}{8h^3}-\frac{3.qL^2}{20h}-\frac{qL^4}{32h^3}\right]$$

**Or :** $I=\frac{b.h^3}{12}=\frac{h^3}{12}$; $\quad d'o$ù

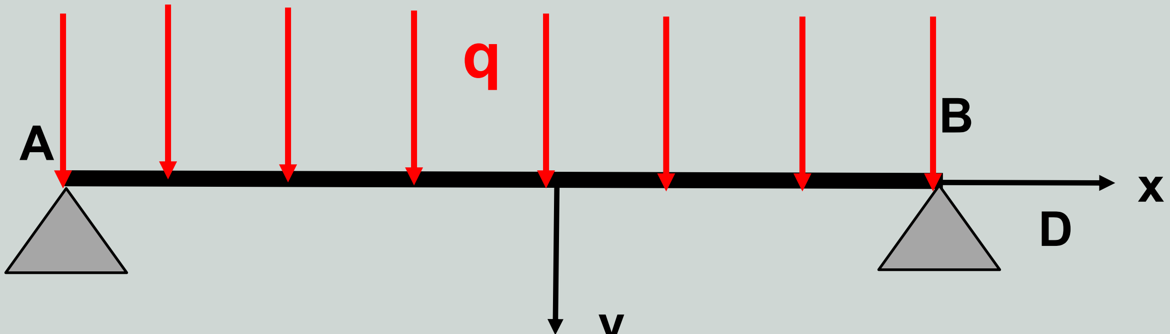
$$\boxed{v_{max}=\frac{5.q.L^4}{384\,EI}+\left[\frac{3.qL^2}{10h}-\vartheta\frac{3.qL^2}{16h}\right]}$$

# Application

$$v_{max} = \frac{5.q.L^4}{384\,EI} + \left[\frac{3.qL^2}{10h} - \vartheta\,\frac{3.qL^2}{16h}\right]$$

Or on sait par la RDM, que pour une poutre simplement appuyée soumise à une charge uniforme:

$$v_{max} = \frac{5.q.L^4}{384\,EI}$$




Par comparaison, il ya un terme en plus en théorie d'élasticité:

$$\left[\frac{3.qL^2}{10h} - \vartheta\,\frac{3.qL^2}{16h}\right]$$

Généralement pour des dimensions bien définies respectant les hypothèses de la théorie des poutres, le terme additionnel $\frac{3.qL^2}{10h} - \vartheta\,\frac{3.qL^2}{16h}$ reste faible devant la valeur de $\frac{5.q.L^4}{384\,EI}$

**Merci.** **Fin de l’application 8**