TD : Chapitre 4

Méthodes d'intégration numérique

Exercice 1

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$y_i = y(x_i)$	0.6	0.75	1	1.5	3

Calculer par la méthode de Simpson :

1- $I_1 = \int_1^5 y(x)dx$

2- $I_2 = \int_2^4 y(x)e^{1/x}dx$

Solution

x_i	1	2	3	4	5
$y_i = y(x_i)$	0.6	0.75	1	1.5	3

En appliquant la formule de Simpson (Equation (4.8)) au tableau ci-dessus, on obtient :

$$I_1 = \int_1^5 y(x)dx \approx \frac{h}{3}\{y_0 + y_5 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2\} = \frac{1}{3}\{0.6 + 3 + 4(0.75 + 1.5) + 2\} = 4.8667$$

On pose : $z(x) = y(x)e^{1/x}$

x_i	2	3	4
$y_i = y(x_i)$	0.75	1	1.5
$z_i = y_i e^{1}/x_i$	1.2365	1.3956	1.926

En appliquant la formule de Simpson (Equation (4.8)) au tableau ci-dessus, on obtient :

$$I_2 = \int_2^4 y(x)e^{1/x}dx \approx \frac{h}{3}\{z_0 + z_2 + 4z_1\} = \frac{1}{3}\{1.2365 + 1.926 + 4.\ 1.3956\} = 2.915$$

Exercice 2

Calculer par la méthode des trapèzes (n=4), l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{\sin(x)} e^{x^2} dx$$

Solution

En posant pose $f(x) = \frac{1}{sin\ x} e^{x^2}$ et en partageant l'intervalle [1,2] en 4 segments, on obtient le tableau suivant :

x_i	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x_i)$	3.2304	5.0272	9.5116	21.7289	60.0443

Formule des trapèzes (Equation (4.3)) : $I = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_1^{n-1} f(x_i))$

$$I = 16.9763$$

Exercice 3

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau:

x_i	1	2	3	4	5	6
$y_i = y(x_i)$	0.6	0.75	1	1.5	3	5

1- Calculer par la méthode des trapèzes $I_1 = \int_3^5 y(x)dx$
2- Calculer par la méthode de Simpson $I_2 = \int_2^4 y(x)e^{1/x}dx$

Solution

1- Méthode des trapèzes $I_1 = \int_1^5 y(x)dx$

x_i (i=0,1,2)	3	4	5
$y_i = y(x_i)$	1	1.5	3

$$I_1 = \int_1^5 y(x)dx \approx \frac{h}{2}\{y_0 + y_2 + 2y_1\} = \frac{1}{2}\{1 + 3 + 2 * 1.5\} = 4.5$$

2- Méthode de Simpson $I_2 = \int_2^4 y(x)e^{1/x}dx$

On pose : $z(x) = y(x)e^{1/x}$

x_i (i=0, 1,2)	2	3	4
$y_i = y(x_i)$	0.75	1	1.5
$z_i = y_i e^{1/x_i}$	1.2365	1.3956	1.926

$$I_2 = \int_2^4 z(x)dx \approx \frac{h}{3}\{z_0 + z_2 + 4z_1\} = \frac{1}{3}\{1.2365 + 1.926 + 4.\ 1.3956\} = 2.9150$$

Exercice 4

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau ci-dessous:

x_i	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3
$y_i = y(x_i)$	0.6	0.75	1	1.5	3	5

1- Calculer par la méthode des trapèzes $I_1 = \int_{1.4}^{2.6} \frac{1}{x} e^{y(x)} dx$

2- Calculer par la méthode de Simpson $I_2 = \int_1^3 y(x)dx$

Solution

On pose : $z(x) = \frac{1}{x} e^{y(x)}$

x_i	1.4	1.8	2.2	2.6
$y_i = y(x_i)$	0.75	1	1.5	3
$z_i = z(x_i)$	1.5121	1.5102	2.0371	7.7252

Méthode des trapèzes :

$$\int_{1.4}^{2.6} \frac{1}{x} e^{y(x)} dx = \frac{0.4}{2}(1.5121 + 7.7252 + 2(1.5102 + 2.0371)) = 3.2664$$

On ne peut pas appliquer la méthode de Simpson car le nombre de segments est impair (n=5)

Exercice 5

En utilisant la méthode de Gauss et en choisissant le nombre de points adéquat calculer la valeur exacte de $I = \int_{-1}^{1} (x+1)^5\, dx$

r (nombre de points de Gauss)	ξ_i ou t_i (abscisse)	w_i(poids)
1	0	2

2	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
3	0 $\mp\sqrt{3/5}$	$8/9$ $5/9$

Solution

Si r est le nombre de points de Gauss, la méthode de Gauss permet d'intégrer exactement tout polynôme de degré$\leq 2r-1$. On a donc 2r-1=5 soit r=3.

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^5\,dx = w_1\xi_1^5 + w_2\xi_2^5 + w_3\xi_3^5 = \frac{8}{9}1^5 + \frac{5}{9}\left\{\left(1-\sqrt{3/5}\right)^5 + \left(1+\sqrt{3/5}\right)^5\right\} = 10.6667$$

Exercice 6

Soit le tableau suivant :

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(x_i)$	0	0.5	0.866

Calculer par la méthode de Gauss en choisissant r=2 : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,dx$

r(nombre de points de Gauss)	ξ_i ou t_i (abscisse)	w_i(poids)
1	0	2
2	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
3	0 $\mp\sqrt{3/5}$	$8/9$ $5/9$

Solution

On pose $x = \frac{\pi}{6}(1+t)$,

Pour r=2 (r est le nombre de points de Gauss), la formule de Gauss s'écrit :

$$I = \frac{\pi}{6}\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{\pi}{6}(1+t)\right)dt = \frac{\pi}{6}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1-1/\sqrt{3}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1+1/\sqrt{3}\right)\right)\right] = 0.499$$

Exercice 7

Le tableau ci-dessous donne les valeurs expérimentales de la hauteur d'eau f en fonction du coefficient K.

K	20	25	30	35	40
f	1.78	1.75	1.73	1.72	1.71

En utilisant la méthode des trapèzes, calculer $\int_{20}^{40} f(K)\ dK$

En utilisant la méthode des trapèzes, calculer $\int_{20}^{40} f(K)\ dK$

Calculer $\int_{20}^{40} f(K)\ dK$ à l'aide de la méthode des trapèzes

Solution

$$\int_{20}^{40} f(K)\ dK = \frac{5}{2}[1.78 + 1.71 + 2(1.75 + 1.73 + 1.72)] \quad (1\ pts)$$

$$\int_{20}^{40} f(K)\ dK = 34.7250$$