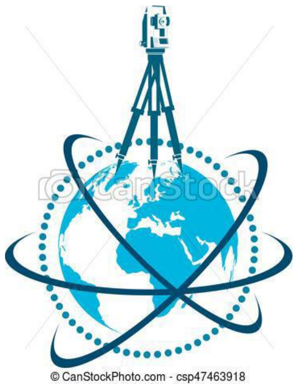
TRIGONOMÉTRIE

2020

NOTES DE COURS DU SEMESTRE 2



ENSEIGNANTE DE LA MATIÈRE: DERKAOUI AICHA

INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNIQUES APPLIQUÉES

Table des matières

Objectifs

Le cours "TRIGONOMÉTRIE" vise à :

• Définir les éléments de base utilisées en trigonométrie plane et sphérique.

• Comprendre les principes fondamentaux relatifs à la résolution des triangles.

• appliquer les notions de base et les formules fondamentales pour la résolution des triangles.

• Maîtriser les calculs en topographie et en géodésie.

• Etablir les relations liant les grandeurs caractéristiques d'un triangle sphérique.

A l'issu de ce cours, l'apprenant ou l'étudiant sera capable de :

• Différencier les lois fondamentales essentielles relatives à la trigonométrie

• Résoudre des équations trigonométriques.

• Connaître les différents types de triangles et les méthodes utilisées pour leurs résolutions.

• appliquer les notions de base pour la maîtrise des calculs en topographie et en géodésie.

• Mener des calculs trigonométriques adaptés à la topographie.

Prérequis :

Pour bien suivre le cours " TRIGONOMÉTRIE ", l'apprenant doit avoir acquis certaines connaissances sur :

• Les Mathématiques du niveau secondaire,

• les notions de base en géodésie.

Introduction

Aux étudiants...

Ces notes de cours ≪ TRIGONOMÉTRIE≫, que vous allez suivre en première année de licence Topographe Géomètre à L'Institut des sciences et techniques appliqué ISTA de Tlemcen. Constitués pour l'essentiel par des rappels de notions et de règles de calcul que vous avez normalement déjà abordé au lycée. Seuls quelques aspects de la deuxième partie du cours portant sur la Trigonométrie sphérique peuvent représenter des nouveautés. De nombreux exemples et exercices corrigées illustrent des points importants et, à la fin de chaque partie et une liste d'exercices vous est proposée vous permettant de vous entraîner. Ils pourront, à l'occasion, servir de sujet de contrôle continu ou de travail rédigé à rendre. La version électronique est disponible sur l'environnement pédagogique « Moodle ».

TRIGONOMÉTRIE PLANE

I

1. Rappel de trigonométrie

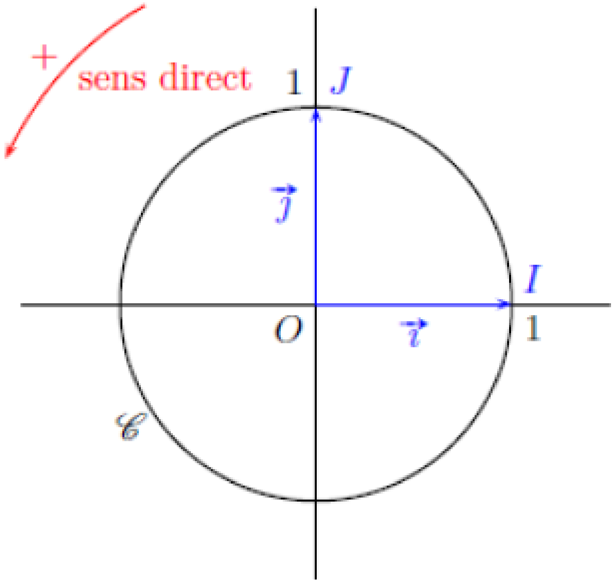
1.1. Le cercle trigonométrique

Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle c de centre O, de rayon 1, et orienté de la manière suivante :

• le sens direct (appelé aussi sens positif ou trigonométrique) est le sens inverse des aiguilles d'une montre ;

• le sens indirect (ou négatif) est le sens des aiguilles d'une montre.



La longueur (périmètre) du cercle trigonométrique est 2π (car le rayon R vaut 1).

1.2. Les unités de mesure

Définition

Le degré : l'unité de mesure historique des angles. Un tour complet compte 360 degrés.

Le radian : unité adimensionnelle (sans dimension).

Le grade : unité de mesure centésimale des angles. Noté généralement gr ou parfois gon.

Degrés	Radians	Grades
0	0	0
30	π/6	33.3
45	π/4	50
60	π/3	66.7
90	π/2	100
120	2π/3	133.3
135	3π/4	150
150	5π/6	166.7
180	π	200

L'unité de mesure des angles choisie par le monde scientifique pour les angles réels est le radian (rad). Sa définition est liée à l'usage du cercle trigonométrique : la mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique (en plaçant le sommet de l'angle au centre du cercle).

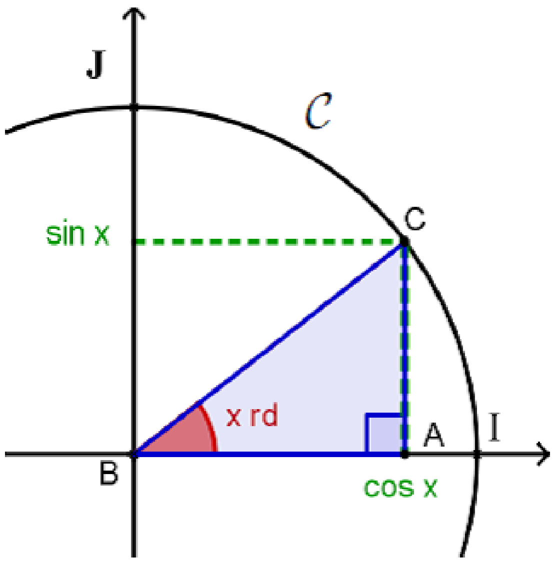
1.3. Définitions et propriétés

Rappel

Soit un nombre réel x et M le point du cercle trigonométrique associé par l'enroulement de l'axe des nombres réels autour du cercle trigonométrique.

- L'abscisse du point M s'appelle le cosinus du nombre réel x et se note cos(x).

- L'ordonnée du point M s'appelle le sinus du nombre réel x et se note sin(x).

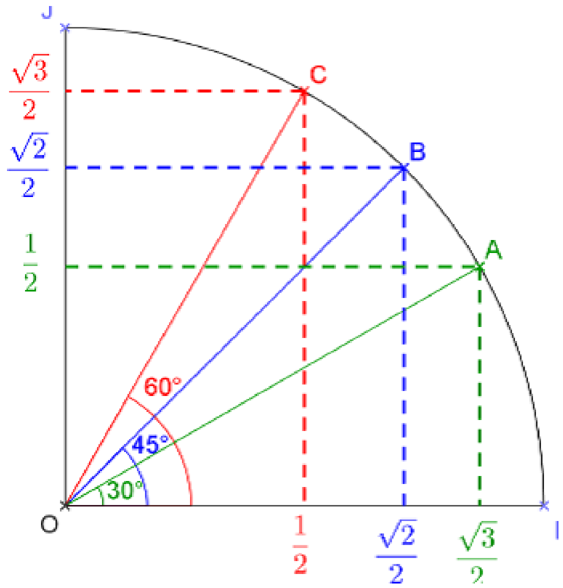


Pour tout réel x, -1 $\cos x$ 1 et -1 $\sin x$ 1 et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

1.4. Valeurs particulières

Il est utile de connaître ou de savoir retrouver rapidement les valeurs des sinus et cosinus des angles suivants :

Angles	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

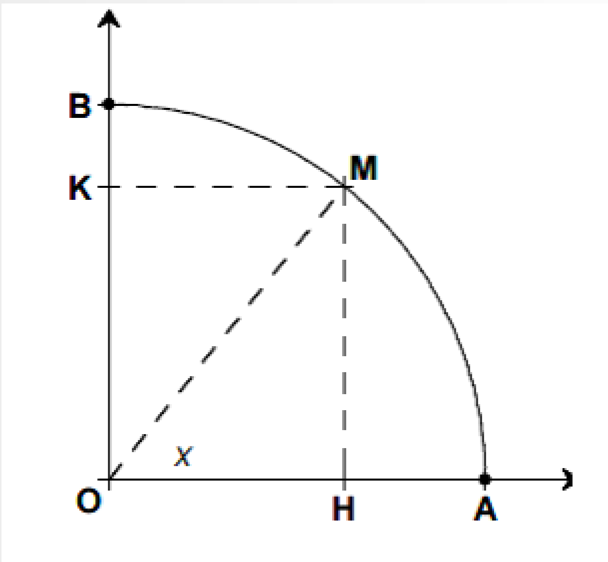


1.5. Formules de trigonométrie

Fondamental : Formule fondamentale et ses transformées

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Démonstration : Le cercle trigonométrique c a pour rayon 1, alors tout point de c a une abscisse et une ordonnée comprise entre – 1 et 1.



De plus, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM, on obtient :

$$OM^2 + HM^2 = \sin x^2 + \cos x^2$$

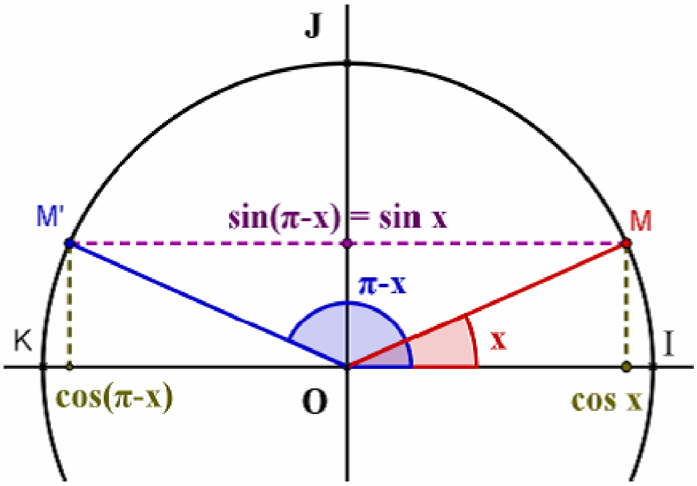
Comme M appartient à C, alors OM = 1

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \quad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1.5.1. Sin (π-x), Cos (π-x), tan(π-x)

Méthode



Application : ces formules permettent de passer du 2e au 1er quadrant, p.ex. :

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

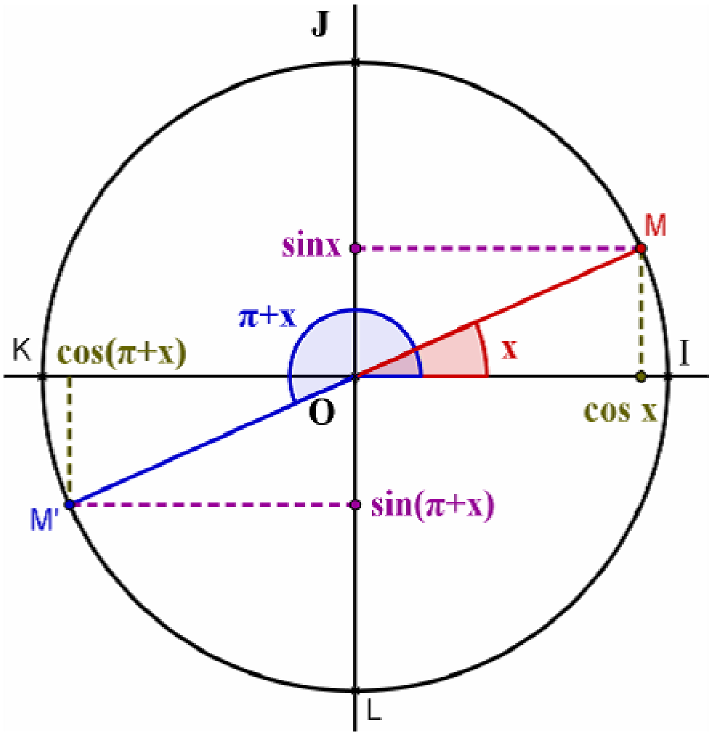
$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1.5.2. sin (π+x), cos(π+x), tan(π+x)

Soient x ε ℝ , M(cos x, sin x)et M'(cos (π+x), sin (π+x)), alors M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O donc ils ont des ordonnées et des abscisses opposées, en d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi+x) = -\sin x \quad \cos(\pi+x) = -\cos x$$



2. Résolution d'équations et d'inéquations

On a : Quel que soit le réel x, cos(x, x+ k× 2π) = cos x, et sin(x, x+ k× 2π) = sin x, avec k entier.

Démonstration : Aux points de la droite orientée d'abscisses x et x + 2kπ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \sin(x+2k\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x+2k\pi) = \cos x}$$

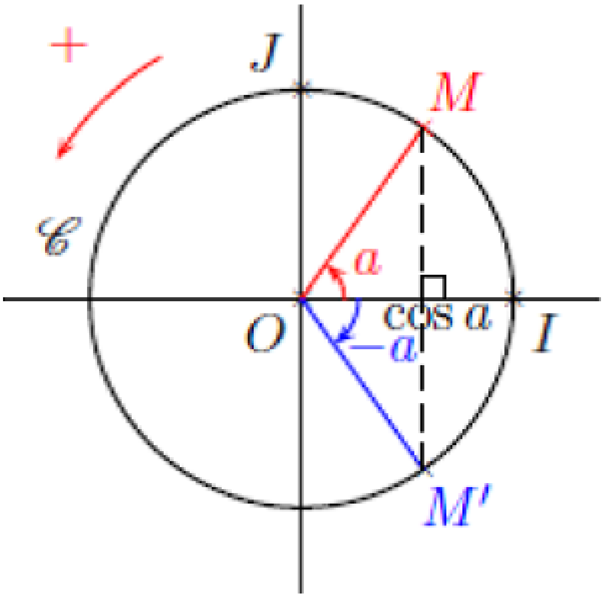
Ceci découle immédiatement du fait que f (x + k × 2π) = f (x) et on exprime cette propriété en disant que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

2.1. Équations trigonométriques

2.1.1. Équations cos(x) = cos(a)

Méthode

Graphiquement, il existe deux points M et M' sur le cercle trigonométrique c qui correspondent à des angles qui ont le même cosinus. Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (OI). On retrouve ici la propriété concernant les angles associés : pour tout réel x, cos (–x) = cos x.



Exemple

L'équation cos x= cos π/3 a pour solution π/3 +2kπ et - π/3 +2kπ où k est un entier relatif.

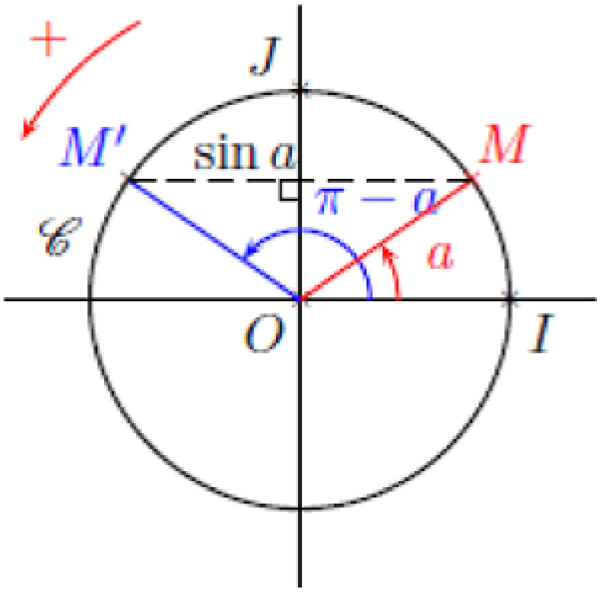
2.1.2. Équations sin(x) = sin(a)

Méthode

Graphiquement, il existe deux points M et M' sur le cercle trigonométrique c qui correspondent à des angles qui ont le même sinus. Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (OJ). On retrouve ici la propriété : pour tout réel x, sin (π– x) = sin x.

Exemple

L'équation sin x= sin π/6 a pour solution π/6+ 2kπ et π- π/6 + 2kπ= 5π/6 +2kπ ou k est un entier relatif.



2.1.3. Trois égalités fondamentales

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + k \cdot 2\pi \\ \cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + k \cdot 2\pi \\ \tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k \cdot \pi \end{array}}$$

Remarque

Pour l'égalité de deux sin ou de deux cos on a deux séries de solutions, alors que pour l'égalité de deux tan on n'a qu'une seule série de solutions.

Complément : Formules d'addition

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

2.1.4. Quelques méthodes de résolution d'une équation trigonométrique

Il n'y a bien entendu pas de méthode générale pour résoudre une équation Trigonométrique quelconque. Les cas les plus simples correspondent aux cas où l'on peut, par une suite de transformations, se ramener à une ´équation ´élémentaire. Il est bien sur impossible de lister tous les cas particuliers. On donne à titre d'illustration la résolution de quelques cas.

a) Première méthode

Les équations se trouvant sous l'une des trois formes précédentes se résolvent directement à l'aide de ces formules.

Exemple

$$\sin 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \pi - x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple

$$\cos 5x = \cos 2x \Leftrightarrow 5x = 2x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 5x = -2x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad 7x = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{7}$$

$$S = \left\{\frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{7} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

i Deuxième méthode

En se servant des formules trigonométriques on peut parfois se ramener à l'une des formes précédentes.

Exemple

$$\cos x + \sin 3x = 0$$

$$\leftrightarrow \cos x = -\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi \; ou \; x = -\frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \; ou \; x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$s = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \; ou \middle| -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \; avec \; k \in Z\right\}$$

Exemple

- $$2\sin x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

- $$\sin 2x+2\cos x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x+2\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \quad \text{ou} \quad \sin x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

i Troisième méthode

Parfois on peut se tirer d'affaire par un changement d'inconnue (pour obtenir une équation de degré supérieur à 1.

Exemple

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

en posant $y = \sin x$ l'équation devient : $2y^2 - y - 1 = 0$, $\Delta = 9$, $y' = 1$, $y'' = -\dfrac{1}{2}$, d'où :

$$\sin x = 1 \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \sin x = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2.2. Inéquations trigonométriques

2.2.1. Inéquation de fonction sin x

Rappel

on sait que :

$$\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$
$$\sin x \leq 0 \Leftrightarrow -\pi + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi$$

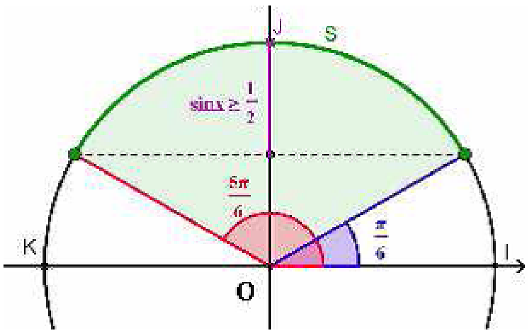
on résout d'abord l'équation sin x = a et on voit alors aisément quelles sont les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

Exemple

$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$



2.2.2. inéquation de la fonction cos x

Rappel

on sait que :

$$\cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\cos x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

on résout d'abord l'équation cos x =a et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

Exemple

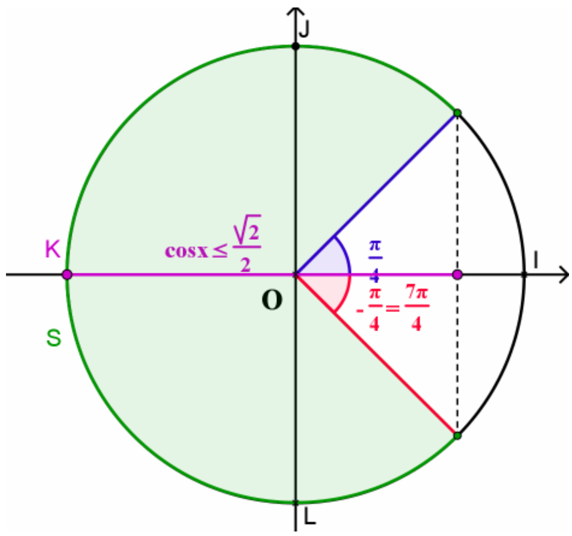
$$\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$



2.2.3. inéquation de la fonction tan x

Rappel

on sait que:

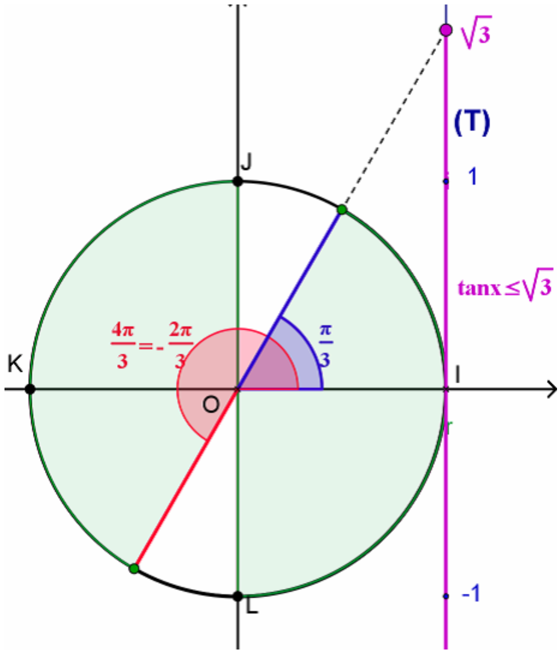
$\tan x \ge 0 \Leftrightarrow \sin x$ et $\cos x$ ont même signe $\Leftrightarrow k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\tan x \le 0 \Leftrightarrow \sin x$ et $\cos x$ ont des signes opposés $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$

On résout d'abord l'équation tan x = a et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

Exemple

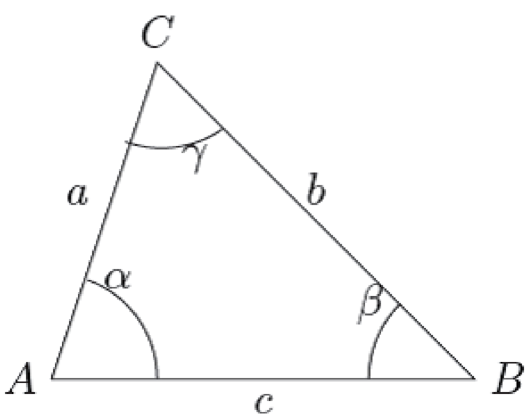
$$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$S=\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi<x\leq\frac{\pi}{3}+k\pi\right\}$$



3. Formules trigonométriques dans un triangle quelconque

En géométrie, la résolution d'un triangle consiste en la détermination des différents éléments d'un triangle (longueurs des côtés et mesures des angles) à partir de certains d'autres.



En partant des relations de triangles rectangles, on définit deux séries de formules qui s'appliquent aux triangles quelconques :

• Les formules aux sinus,

• Les formules aux cosinus.

3.1. loi des cosinus

Ces formules sont appelées « théorème de Pythagore généralisé » ou formule d'Al-Kashi » 1

Si on note :

• A, B, C les sommets du triangle quelconque.

• α, β, ϒ, les angles de ces sommets.

• a, b, c les longueurs des côtés opposés à ces angles.

Alors, on a :

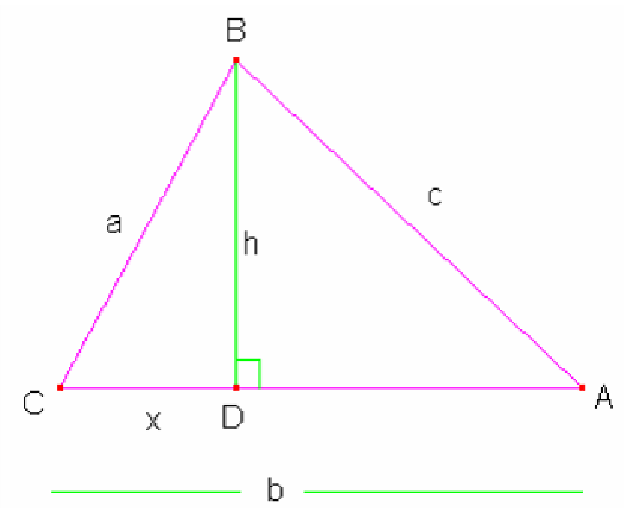
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Méthode

Un triangle quelconque peut toujours être divisé en deux rectangles. Il suffit pour cela de tracer une de ses hauteurs



1. Considérons le triangle ABD.
   Selon Pythagore $c^2 = h^2 + (b-x)^2$

2. Considérons le triangle BCD.
   Selon Pythagore $a^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - x^2$

3. $\text{Cos } C = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a*\cos C$

Reprenons $c^2 = h^2 + (b-x)^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 - x^2 + (b-x)^2$ (car $h^2 = a^2 - x^2$)

$\Rightarrow c^2 = a^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$

Remplaçons x par a*cos C

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

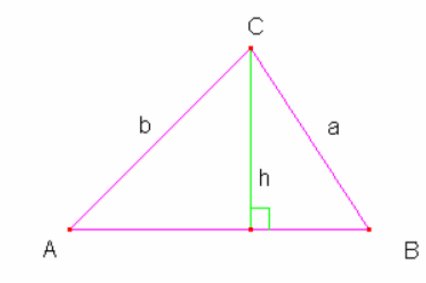
3.2. loi des sinus

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Méthode

Démonstration

Avec une hauteur à partir de C



$\sin A = \frac{h}{b}$ et $\sin B = \frac{h}{a}$

$h = b*\sin A$ et $h = a*\sin B$

Par comparaison

$b*\sin A = a*\sin B$

$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$

Avec une hauteur à partir de B, on trouverait $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

Donc la loi des sinus est $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ ou $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

3.3. Aire d'un triangle

Outre la fameuse propriété « l'aire d'un triangle est égal au demi produit de la base par la hauteur », il est bon de savoir l'aire d'un triangle est égale au demi produit des longueurs de deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils forment.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

4. Exercices de Trigonométrie plane

Exercice

Effectuez les calculs nécessaires et répondez à la question :

On donne sin x=-3/4 , avec x є [π, 3π/2}. Calculer la valeur exacte de : a= cos x

(1) a=√7/4	(2) a=√7/16
(3) a=-√7/4	(4) a=(-√3)/2

- (1)
- (2)
- (3)
- (4)

Exercice

Résoudre dans]-π,π], l'inéquation suivante : cos x ≤1/2

(1) S=]-2π/3 ;0] U [0 ; 2π/3]	(2) S=]-π ; 2π/3]U [2π/3 ;π]
(3) S=]-π ;2π/3]	(4) S= [2π/3 ; π]

- (1)
- (2)
- (3)
- (4)

5.

1. Résoudre dans R l'équation :

$\sin 3x = 1/2$ et $\cos(2x - \pi/3) = \sqrt{3}/2$

2.

- Donnez une expression simplifiée de: $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.
- Exprimez $\sin(a - b)$ et $\cos(a - b)$.
- Exprimez $\sin(2.a)$ et $\cos(2.a)$.

3.

Résoudre dans R les équations suivantes :

$\cos(2x) = \cos(x - \pi/3)$

$\sin(3x) = \sin(2x - \pi/4)$

Question

TRIGONOMÉTRIE SPHERIQUE

II

1. TRIANGLE SPHÉRIQUE

On considère une sphère de centre un point O et de rayon unité et trois points sur la sphère A, B, et C.

Définition : On appelle triangle sphérique la figure formée par les 3 arcs de grands cercles AB, AC, et CB inférieurs à 200 grades (Fig. 1).

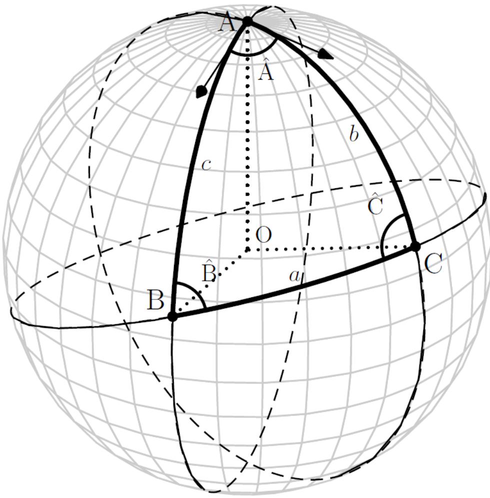
1.1. Les grands cercles

Ce sont les cercles de centre O et de rayon 1.

Les grandeurs qui caractérisent le triangle sphérique ABC sont :

- les 3 côtés notés respectivement a, b, c, équivalents aux angles au centre des directions OA, OB, OC soit a = (OB,OC), b = (OA,OC), c =(OA,OB).
- les 3 angles dièdres des faces du trièdre OA, OB, OC notés A, B, C.

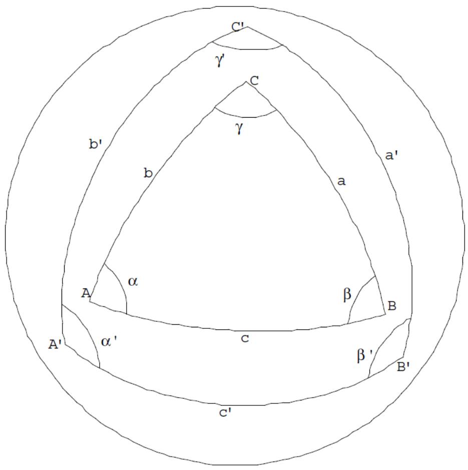
Les angles et les côtés du triangle sphérique sont donc des grandeurs mesurables par des unités angulaires (Degrés, Grades ou radians).



2. TRIÈDRE SUPPLÉMENTAIRE - LE TRIANGLE SPHÉRIQUE POLAIRE

Relation entre les éléments du triangle sphérique et son triangle polaire 25

A chaque triangle sphérique correspond un second triangle que l'on nomme triangle polaire ou supplémentaire. Soit ABC un triangle sphérique quelconque. Au trièdre OA, OB, OC, on associe le trièdre supplémentaire dont les arrêtes OA', OB', OC' sont respectivement orthogonales aux faces OBC, OAC, OAB. Le point A' est choisi tel que A et A' soient dans la même demie sphère limitée par BC. Il est de même pour les points B' et C'. Le point B' est choisi tel que B et B' soient dans la même demie sphère limitée par AC. Le point C' est choisi tel que C et C' soient dans la même demie sphère limitée par AB.



Propriétés: Soit ABC un triangle sphérique, on note a, b, c les côtés opposés respectivement à A, B, C, puis α, β, les angles opposés à a, b, c de même on note a', b', c', α', β', ' les éléments de son triangle polaire A'B'C'.

On a les relations : $a'+\alpha = a+\alpha' = \pi$, $b'+ = b+ ' = \pi$, $c'+ = c+ ' = \pi$

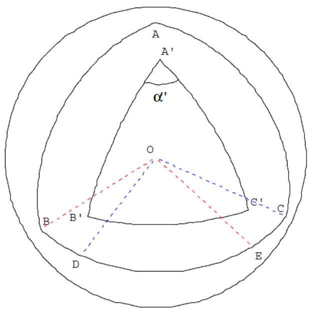
C'est à dire les angles des sommets de l'un des deux triangles sont respectivement les supplémentaires des côtés de l'autre.

De plus si A'B'C' est le triangle polaire de ABC alors le triangle polaire de A'B'C' n'est autre que ABC. Autrement dit l'application qui à un triangle fait correspondre son triangle polaire est involutive.

2.1. Relation entre les éléments du triangle sphérique et son triangle polaire

Méthode

On note par D le point d'intersection du grand cercle passant par A' et B' et de celui passant par B et C, on note par E le point d'intersection du grand cercle passant par A' et C' et de celui passant par B et C (Fig. 3). On a alors, en notant DE la longueur du segment sur la sphère allant de D à E:



DE =α' car le plan (ODE) est perpendiculaire à la droite (OA'). Ainsi BC+DE=a+α'.

Or BC+DE=BE+DC et D est sur le grand cercle passant par A' et B' qui a pour pôle C donc la mesure de DC est π/2.

De même E est sur le grand cercle passant par A' et C' qui a pour pôle B donc la mesure de BE est aussi π/2.

On obtient donc a+α'=BE+DC =π.

Par permutation, on retrouve les autres relations.

3. FORMULES DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Un triangle sphérique est entièrement défini par la donnée de 3 de ses 6 éléments.

Il existe donc, entre 4 éléments quelconque

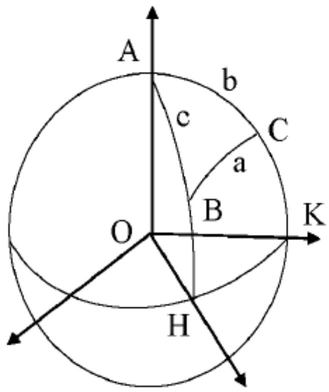
$$C_4^6 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

relations qui en permettent la résolution.

Données	formule	nombre
3cotés, 1 angle	Fondamentale	03
3 angles, 1 coté	Corrélative	03
2 cotés, 2 angles (opposés aux cotés)	Sinus	03
2 cotés, 2 angles (adjacents aux cotés)	Cotangentes	06

3.1. Etablissement des formules fondamentales et corrélatives

Considérant le triangle sphérique ABC de côtés a, b, c. Une première relation est obtenue en calculant le produit scalaire OB.OC de 2 manières (voir Figure ci-dessous).



$$\vec{OB} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right).\vec{OH} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right).\vec{OA} = \sin(c).\vec{OH} + \cos(c).\vec{OA}$$

$$\vec{OC} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right).\vec{OK} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right).\vec{OA} = \sin(b).\vec{OK} + \cos(b).\vec{OA}$$

d'ou :

$$\vec{OB}.\vec{OC} = \sin(b).\sin(c).\vec{OH}.\vec{OK} + \cos(b).\cos(c)$$

or

$$\vec{OH}.\vec{OK} = \|\vec{OH}\|.\|\vec{OK}\|.\cos(\vec{OH}, \vec{OK}) = 1.1.\cos(A) = \cos(A)$$

et

$$\vec{OB}.\vec{OC}=\|\vec{OB}\|.\|\vec{OC}\|.\cos(\vec{OB},\vec{OC})=1.1.\cos(a)=\cos(a)$$

d'ou

$$\cos(a)=\cos(b).\cos(c)+\sin(b).\sin(c).\cos(A)$$
$$\cos(b)=\cos(a).\cos(c)+\sin(a).\sin(c).\cos(B)$$
$$\cos(c)=\cos(a).\cos(b)+\sin(a).\sin(b).\cos(C)$$

1er groupe : Formules Fondamentales

Les deux dernières formules sont obtenues par permutation circulaire.

En utilisant le triangle polaire, on a :

Cos(a') = Cos(b').Cos(c') + Sin(b').Sin(c').Cos(A')

Or a' = π – A, b' = π – B, et c' = π - C, a = π – A', d'où:

$$\cos(A)=-\cos(B).\cos(C)+\sin(B).\sin(C).\cos(a)$$
$$\cos(B)=-\cos(A).\cos(C)+\sin(A).\sin(C).\cos(b)$$
$$\cos(C)=-\cos(A).\cos(B)+\sin(A).\sin(B).\cos(c)$$

2ème groupe : Formules Corrélatives

Les deux dernières formules sont obtenues par permutation circulaire.

3.2. Formule des Sinus

De la première formule fondamentale, on a :

$$\cos(A)=\frac{\cos(a)-\cos(b).\cos(c)}{\sin(b).\sin(c)}$$

et sachant que

$$(\sin(A))^2=1-(\cos(A))^2$$

on aura :

$$\frac{(\sin(A))^2}{(\sin(a))^2}=\frac{(\sin(B))^2}{(\sin(b))^2}=\frac{(\sin(C))^2}{(\sin(c))^2}\Rightarrow\frac{\sin(A)}{\sin(a)}=\frac{\sin(B)}{\sin(b)}=\frac{\sin(C)}{\sin(c)}$$
$$\frac{\sin(A)}{\sin(a)}=\frac{\sin(B)}{\sin(b)}=\frac{\sin(C)}{\sin(c)}$$

3ème groupe : Formules des Sinus

Puisque les grandeurs caractérisant le triangle sphérique sont des quantités positives inférieures à π.

3.3. Formules des Sinus-Cosinus

En utilisant les formules fondamentales, on a :

$$\cos(a)=\cos(b).\cos(c)+\sin(b).\sin(c).\cos(A)$$
$$\cos(b)=\cos(a).\cos(c)+\sin(a).\sin(c).\cos(B)$$

Et en remplaçant dans la deuxième formule, l'expression de Cos(a), on obtient

$$\sin(c).\cos(b)=\sin(b).\cos(c).\cos(A)+\sin(a).\cos(B)$$

d'ou

$$\sin(a).\cos(B)=\cos(b).\sin(c)-\sin(b).\cos(c).\cos(A)$$

Sin(a).Cos(B) = Cos(b).Sin(c) – Sin(b).Cos(c).Cos(A)
Sin(a).Cos(C) = Cos(c).Sin(b) – Sin(c).Cos(b).Cos(A)
Sin(b).Cos(A) = Cos(a).Sin(c) – Sin(a).Cos(c).Cos(B)
Sin(b).Cos(C) = Cos(c).Sin(a) – Sin(c).Cos(a).Cos(B)
Sin(c).Cos(A) = Cos(a).Sin(b) – Sin(a).Cos(b).Cos(C)
Sin(c).Cos(B) = Cos(b).Sin(a) – Sin(b).Cos(a).Cos(C)

4ème groupe : Formules des Sinus -Cosinus

Les autres formules sont obtenues par permutation circulaire.

Remarque

Ce groupe des formules contient cinq (05) éléments au lieu de quatre (04), et par conséquent, elles ne sont pas considérées comme étant des formules de résolution.

3.4. Formules des Cotangentes

En remplaçant dans la première formule du groupe 4, Sin(a) par Sin(A).Sin(b)/Sin(B) (Formule des Sinus), on obtient :

Sin(A).Cotg(B) = Cotg(b).Sin(c) – Cos(c).Cos(A)
Sin(A).Cotg(C) = Cotg(c).Sin(b) – Cos(b).Cos(A)
Sin(B).Cotg(A) = Cotg(a).Sin(c) – Cos(c).Cos(B)
Sin(B).Cotg(C) = Cotg(b).Sin(a) – Cos(a).Cos(B)
Sin(C).Cotg(A) = Cotg(a).Sin(b) – Cos(b).Cos(C)
Sin(C).Cotg(B) = Cotg(b).Sin(a) – Cos(a).Cos(C)

5ème groupe : Formules des cotangentes

Les autres formules sont obtenues par permutation circulaire.

4. Cas d'un Triangle Rectangle

Méthode

Pour un triangle sphérique rectangle, un des angles vaut π/2 = 100gr = 90°. Les formules se simplifient, leur nombre est:

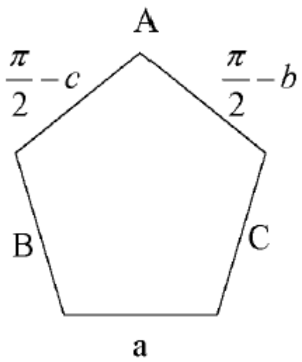
$$C_3^5 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Il est facile de voir qu'on retrouve facilement toutes les relations liées au cas particulier du triangle sphérique rectangle à l'aide du procédé connu sous le nom de règle mnémonique de Napier : On dispose sur les côtés d'un pentagone les cinq éléments autre que l'angle droit dans l'ordre où on les rencontre, à condition de remplacer les côtés adjacents à l'angle droit par leurs compléments à π/2.

Dans ces conditions, le Cosinus de l'un quelconque des cinq éléments est égal :

- Soit au produit des cotangentes des éléments adjacents
- Soit au produit des sinus des éléments non adjacents.

Supposons que A = π/2, on fait le schéma ci-dessous :



Exemple

Cos(a) = Cotg(B).Cotg(C),

Cos(a) = Sin(π/2-b).Sin (π/2-c)=Cos(b).Cos(c)

5. l'excès sphérique

Définition

On appelle excès sphérique du triangle, la quantité notée ε définie par ε = A + B + C − π

Si R désigne le rayon de la sphère, on démontre que l'aire du triangle sphérique ABC est donnée par :

$$\varepsilon = R^2.(A+B+C-\pi) = \varepsilon.R^2$$

Où ε est l'excès sphérique du triangle en radians.

6.

exercice de Trigonométrie Sphérique

ABC désigne un triangle sphérique. On donne à chaque fois quelques dimensions du triangle, déterminer des valeurs approchées `a la minute près des dimensions manquantes :

$a = 110°13'$, $b = 58°2'$ et $C = 90°$.

$a = 105°24'$, $B = 28°36'$ et $C = 90°$.

$a = 51°13'$, $c = 79°6'$ et $C = 90°$.

$A = 85°24'$, $B = 118°21'$ et $C = 90°$.

$A = 67°40'$, $b = 86°45'$ et $c = 108°36'$.

$a = 85°35'$, $b = 113°45'$ et $c = 66°28'$.

7.

1). Trouver le cap initial et le cap d'arrivée d'une route orthodromique allant de Chicago ($\phi = 41°50{,}0'$ N, $\lambda = 87°31'42''$ W) à M situé à l'équateur ($\lambda = 170°15'$ E), et trouver la distance entre ces deux points.

2). Un navire quitte New-York ($\phi = 40°48'36''$N, $\lambda = 73°57'30''$W) en suivant une route orthodromique de cap initial 36°. Trouver la latitude et la longitude de sa position B après avoir parcouru 500 milles. Il continue sa route, trouver le point le plus au Nord de sa route.

Question

8.

Les Latitudes ϕ et les Longitudes λ de Londres (A), New York (B) et Buenos Aires (C) sont :

$\phi A = +51°30'$ $\phi B = +40°43'$ $\phi C = -34°36'$

$\lambda A = -0°10'$ $\lambda B = -74°01'$ $\lambda C = -58°27'$

1. Déterminer les distances entre ces trois villes.

2. Calculer la surface du triangle Londres – New York – Buenos Aires.

Un navire suit une route orthodromique de New York à Buenos Aires.

3. Trouver le cap initial et le cap d'arrivée.

4. Trouver le point d'intersection du cercle d'orthodromie et de l'équateur, l'angle que fait la route en ce point et sa distance à New York.

5. Trouver la Latitude et la longitude de sa position D après avoir parcouru 900 Km. Il continue sa route, trouver le point le plus au Nord de sa route.

6. Trouver le point de la route ayant pour Longitude $\lambda = 180°$.