Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
A.U 2019-2020
2ème année licence (S4)

Série d'exercices de Géométrie n°3

Exercice 1 :

Soit α une courbe paramétrée par la longueur de l'arc avec k ,τ≠0.

1. On suppose que α appartient à une sphère centrée à l'origine, c.-à-d. $\|\alpha(t)\| = c^{ste}$ $\forall t$. Montrer que
$$\frac{\tau}{k} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right)' = 0 \ldots.(*)$$
(Indication : poser $\alpha = \lambda T + \mu N + \nu B$ où λ, μ et ν sont des fonctions, puis dériver et utiliser le fait que $\{T, N, B\}$ est une base de R^3).
2. Montrer la réciproque : Si α satisfait l'équation différentielle $(*)$ alors α se trouve sur la surface d'une sphère (en considérant les valeurs de λ, μ et ν obtenues dans (1), montrer que $\alpha - (\lambda T + \mu N + \nu B)$ est un vecteur constant).

Exercice 2 :

On considère l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique $\varphi: [0,2\pi[\times]0,\pi[\longrightarrow \mathcal{E}$ de l'ellipsoïde est donnée par : $\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos v \end{cases}$
2. Calculer l'aire de la surface $\mathcal{E}$.

Exercice 3 :

Soit $a > 0$; on considère la caténoïde localement paramétrée par

$$f(u,v) = (a \cosh v cos\ u, a \cosh v \sin u, av)$$

Et l'hélicoïde localement paramétré par

$$g(s,t) = (t \cos s, t \sin s, as)$$

1. Déterminer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la caténoïde (dans le paramétrage $f(u,v)$).
2. En effectuant un changement de variable $s = u, t = a \sinh v$, donner un nouveau paramétrage de l'hélicoïde.
3. Déterminer les coefficients E', F', G' de la première forme fondamentale de l'hélicoïde (dans ce nouveau paramétrage).
4. Que peut-on conclure ?

Exercice 4 :

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$2(2z^2 + y^2) + x = 0.$$

1. Paramétrer la surface S en prenant les paramètres $u\ et\ v$ parmi les variables $x, y\ et\ z$.
2. Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(-6,1,-1)$.
3. Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(-6,1,-1)$.
4. Calculer, en un point p de la surface, la première forme fondamentale I_p.

Exercice 5 :

Soient F le point $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}$ le plan d'équation $z = -1$. On pose

$$S = \{M \in \mathbb{R}^3 : distance\ de\ M \text{ à } F = distance\ de\ M \text{ à } \mathcal{H}\}$$

1. Montrer que l'ensemble S est défini par une équation de la forme $z = f(x, y)$ qu'on explicitera.
2. Donner un paramétrage régulier de S.
3. Calculer, en chaque point $p \in S$, la première forme fondamentale I_p de S.