Opérateurs Monotones

1 Caractérisation des Opérateurs Monotones

Definition 1 *Soient X un espace de Banach (réel) et $X\prime$son dual. Un opérateur $A : X \to X'$ est monotone si pour tout $u, v \in X$on a*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{X',X} \geq 0$$

Exemple 1

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n,}$un ouvert borné. Pour $p \geq 2$ et pour $i = 1, 2, ..., n$, l'opérateur linéaire

$$B_i : \underset{u}{W_0^{1,p}(\Omega)} \underset{\rightsquigarrow}{\to} \underset{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{W^{-1,q}(\Omega)}$$

est monotone. En effet, pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a en opérant une integration par parties

$$\begin{aligned}
\langle B_i u, u\rangle &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, u(x)\, dx \\
&= -\int_\Omega u(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx \\
&= -\langle B_i u, u\rangle
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\langle B_i u, u\rangle = 0$$

Par linéarité B_i est donc monotone.

Exemple 2

L'opérateur p Laplacien (négatif) $-\Delta_p$,est monotone

$$\begin{aligned}
-\Delta_p &: W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega) \\
\langle \Delta_p u, v\rangle_{W^{-1,q};W_0^{1,p}} &: = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx
\end{aligned}$$

En fait, pour $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
-\langle \Delta_p u - \Delta_p v, u-v\rangle_{W^{-1,q};W_0^{1,p}} &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) (\nabla u - \nabla v)\, dx \\
&\geq \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p} + |\nabla v|^{p} - |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| - |\nabla v|^{p-1} \nabla u \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-1} - |\nabla v|^{p-1} \right) (\nabla u - \nabla v)\, dx \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

La monotonie du p-Laplacien peut être aussi déduite du résultat suivant

Proposition 2 *Si $\phi : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continument differentiable et convexe , alors $\phi' : X \to X'$ est monotone.*

Démonstration.
Pour tous $u, v \in X$, la fonction

$$t \rightsquigarrow \phi(tu + (1-t)v)$$

est une fonction réelle convexe ce qui entraine que sa dérivée est croissante. En particulier,

$$\frac{d}{dt}\phi(tu + (1-t)v)_{|t=1} \geq \frac{d}{dt}\phi(tu + (1-t)v)_{|t=0}$$

ce qui veut dire

$$\langle \phi'(u), u-v)\rangle \geq \langle \phi'(v), u-v)\rangle$$

Et donc ϕ'est monotone.
Puisque l'opérateur $-\Delta_p$ est la dérivée de la fonctionnelle continument differentiable et convexe définie par

$$\phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R};\ \phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx$$

alors la proposition précédante donne une autre preuve de la monotonie de l'opérateur $-\Delta_p$. ■

Definition 3 *Soit X un espace de Banach. Un opérateur $A : X \to X'$ est dit*
(i) hémi-continu si pour tous $u, v, w \in X$, la fonction

$$t \rightsquigarrow \langle A(u + tv), w\rangle \quad \textit{est continue}$$

(ii)borné si l'image par A d'ensemble borné est un ensemble borné
(iii)pseudo- monotone si A est borné et si

$$\left.\begin{array}{c} u_n \rightharpoonup u \textit{ dans } X \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u-v\rangle, \forall v \in X$$

Proposition 4 *Soit X un espace de Banach et $A : X \to X'$un opérateur. On considère les propriétés suivantes*
(i) A est monotone, borné et hémicontinu,
(ii) A est pseudo-monotone,
(iii) A vérifie

$$\left.\begin{array}{c} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \\ Au_n \rightharpoonup \xi \text{ dans } X\prime \\ \limsup\limits_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \le \langle \xi, u\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow Au = \xi.$$

Alors $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$.

Démonstration.
1) $(i) \Longrightarrow (ii)$
Soit A monotone, borné est hemicontinu et soit $(u_n)_n \subset X$ une suite vérifiant:

$$\begin{array}{c} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \\ \limsup\limits_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0 \end{array} \tag{1}$$

Par monotonie de A , on a

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle \ge \langle Au, u_n - u\rangle$$

La convergence faible de (u_n) implique

$$\liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \ge 0 \tag{2}$$

De (2) et (1) , on a

$$\lim_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle = 0. \tag{3}$$

Soit $v \in X$ et on définit $w := (1-\lambda)u + \lambda v$; $(\lambda \in]0, 1[$). Par monotonie,

$$\begin{array}{rcl} \langle Au_n, u_n - w\rangle &=& \langle Au_n, u_n - u\rangle + \langle Au_n, u - w\rangle \\ &\overset{def.w}{=}& \langle Au_n, u_n - u\rangle + \lambda\langle Au_n, u - v\rangle \\ &\ge& \langle Aw, u_n - w\rangle \\ &=& \langle Aw, u_n - u\rangle + \lambda\langle Aw, u - v\rangle \end{array}$$

Puisque $u_n \rightharpoonup u$ et en utilisant (3) ,on obtient

$$\liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u - v\rangle \ge \langle A\left((1-\lambda)\,u + \lambda v\right), u - v\rangle$$

Considérant $\lambda \to 0$ et utilisant l'hemicontinuité de A, on o*btient*,

$$\liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u - v\rangle \ge \langle Au, u - v\rangle$$

Donc, A est pseudo-monotone.
2) $(ii) \Longrightarrow (iii)$
Soit A pseudo-monotone, et considérons une suite $(u_n) \subset X$ telle que

$$\begin{array}{c} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \\ Au_n \rightharpoonup \xi \text{ dans } X\prime \\ \limsup\limits_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \le \langle \xi, u\rangle \end{array} \tag{4}$$

Alors,

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0 \tag{5}$$

(5)et la pseudo-monotonie impliquent que,

$$\liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle; \forall v \in X \tag{6}$$

(6) et (4)impliquent que,

$$\langle \xi, u\rangle - \langle \xi, v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle$$

c.à.d.

$$\langle \xi - Au, u - v\rangle \geq 0 \quad ; \forall v \in X$$

Ce qui est équivalent à

$$\langle \xi - Au, v\rangle \geq 0 \ \ ; \forall v \in X$$

ce qui à son tour implique (l'inégalité étant vraie pour v et -v)

$$\langle \xi - Au, v\rangle = 0 \ \ ; \forall v \in X$$

Conclusion, $Au = \xi$. ■

Proposition 5 *Soient X un espace de Banach reflexif, et $A : X \to X'$ un opérateur monotone, borné et hemicontinu. Alors,*

$$u_n \to u \ \ \textit{dans } X \Longrightarrow Au_n \rightharpoonup Au \quad \textit{dans} X\prime.$$

On dira que A est continu de X fort dans $X\prime$ faible.

Preuve.
Soit $u_n \to u$ dans X. Puisque A est borné, la suite $(Au_n)_n$ est borné dans X'. Puisque X est reflexif, et en passant à une sous suite il existe $\xi \in X'$ tel que $Au_n \rightharpoonup \xi$ dans $X\prime$. ■

De plus,

$$\begin{aligned}\langle Au_n, u_n\rangle &= \langle Au_n, u_n - u\rangle + \langle Au_n, u\rangle \\ &\leq \|Au_n\| \, \|u_n - u\| + \langle Au_n, u\rangle\end{aligned}$$

Par suite,

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle$$

par le lemme (4) $(implication \ \ (i) \Longrightarrow (iii))$,on obtient $Au = \xi$.

2 Surjectivité des opérateurs monotones

Dans cette section nous présentons des conditions suffisantes pour la surjectivité d'opérateur monotone $A : X \to X'$. Avant on démontre un résultat qui est une conséquence du théorème de point fixe de Brouwer.(voir cours méthode de point fixe page 4)

Proposition 6 *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$,continue. S'il existe $\delta > 0$,tel que $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ pour $\|x\| = \delta$.Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|x_0\| \leq \delta$ et $f(x_0) = 0$.*

Preuve.
Suppoosons le contraire c.à.d.

$$f(x) \neq 0, \forall x \in \bar{\mathcal{B}}\left(0, \delta\right),$$

alors la fonction $g : \bar{\mathcal{B}}\left(0, \delta\right) \to \bar{\mathcal{B}}\left(0, \delta\right)$ telle que

$$g(x) = -\delta \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

est bien définie , continue et $\|g(x)\| = \delta$. Par le théorème de point fixe de Brouwer, il existe $x^* \in \bar{\mathcal{B}}\left(0, \delta\right)$tel que $x^* = g(x^*)$. $\|g(x)\| = \delta$, implique $\|x^*\| = \delta$.Et par suite, utilisant l'hypothèse sur f, on a

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \langle x^*, x^*\rangle = \langle g\left(x^*\right), x^*\rangle \\ &= -\frac{\delta}{\|f(x^*)\|}\langle f\left(x^*\right), x^*\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui contredit $\delta > 0$,et donc notre supposition est fausse et il existe $x \in \bar{\mathcal{B}}\left(0, \delta\right), f(x) = 0$ ■

Theorem 7 (théorème de surjection)
Soient X un espace de Banach réflexif et séparable et $A : X \to X'$ un opérateur monotone borné hemicontinu et coercif c.à.d

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = +\infty$$

Alors, A est surjectif, c.à.d.

$$\forall f \in X', \exists u \in X, Au = f$$

Démonstration.
Soit $f \in X'$. on doit résoudre l'équation $Au = f$. X etant séparable il existe alors $(w_m)_m$ une suite telle que $span\{w_m : m\}$ est dense dans X; On considère l'espace vectoriel $X_m := span\{w_k : 1 \leq k \leq m\}$.
1) Tout d'abord,on montre que pour chaque m il existe $u_m \in X_m$ tel que

$$\langle Au_m, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle, \text{pour chaque} 1 \leq k \leq m \tag{7}$$

Pour tout $u \in X_m$, on considère la restriction de la fonctionnelle linéaire $Au \in X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ au sous espace fermé X_m, et on obtient ainsi une fonctionnelle linéaire sur X_m. En d'autres termes, on définit un opérateur $\mathcal{A}_m : X_m \to X'_m$, par

$$\langle \mathcal{A}_m u, v \rangle_{X_m, X'_m} = \langle Au, v \rangle_{X, X'}$$

Par coercivité, il existe $\delta > 0$ telque pour tout $u \in X$, $\|u\| \geq \delta$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_m u - f, u \rangle_{X_m, X'_m} &= \langle Au - f, u \rangle_{X, X'} \\ &\geq \langle Au, u \rangle - \|f\| \, \|u\| \\ &= \|u\| \left(\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} - \|f\| \right) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

L' operateur $\mathcal{A}_m$ hérite des propriétés de A, donc $\mathcal{A}_m$ est monotone, borné, hemicontinu. Par le corollaire (5)

$$u_n \to u \ \text{ dans } X_m \Longrightarrow Au_n \rightharpoonup Au \quad \text{dans } X_m\prime.$$

Cependant, l'espace $X_m\prime$ étant de dimension finie, la convergence faible et la convergence en norme coïncident, et donc $\mathcal{A}_m$ est continu. Par la continuité de $\mathcal{A}_m$, par l'inégalité (8), et par la proposition (6), il existe $u_m \in X_m$ tel que $\mathcal{A}_m u_m - f = 0$. En d'autres termes, pour chaque $w \in X_m$

$$\langle Au_m - f, w \rangle_{X, X'} = \langle \mathcal{A}_m u_m - f, w \rangle_{X_m, X'_m} = 0 \tag{9}$$

et donc on a établit (7) .
2) Par l'égalité(9) , pour tout m

$$\langle Au_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle \leq \|f\| \, \|u_m\|$$

Par conséquent, la suite $\left(\frac{\langle Au_m, u_m \rangle}{\|u_m\|} \right)_m$ est bornée dans X. Par la coercivité de A, cela implique que la suite (u_m) est bornée dans X. Puisque A est borné, également la suite (Au_m)est bornée dans X'. Puisque X etX' sont réflexifs, et par passage à une sous-suite, il existe $u \in X$, $\xi \in X'$ tels que.

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ dans } X \text{ et } \ Au_n \rightharpoonup \xi \quad \text{dans } X\prime.$$

Pour tout k, on a

$$\langle \xi, w_k \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle Au_m, w_k \rangle = \langle f, w_k \rangle$$

Puisque la suite $(w_k)_k$ est totale dans X, ce ci entraine $\xi = f$. De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} \sup \langle Au_m, u_m \rangle &= \lim_{m \to \infty} \sup \langle f, u_m \rangle \\ &= \lim_{m \to \infty} \langle f, u_m \rangle \\ &= \langle f, u \rangle. \end{aligned}$$

Par le lemme ((4)) $(\textit{implication} \ \ (i) \Longrightarrow (iii))$, $Au = f$. ■

3 Opérateurs monotones injectifs

Theorem 8 (théorème d'injectivité) *Soit $A : X \to X'$ monotone et une des conditions est vérifiée*
(i) A est strictement monotone, c'est-à-dire

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \text{ pour tout } u, v \in X, u \neq v,$$

(ii) A est hémicontinu, X est strictement convexe et $Au = Av$ implique $\|u\| = \|v\|$.
Alors A est injectif.

Démonstration.
(i) Si $Au = Av$, alors $\langle Au - Av, u - v\rangle = 0$, et donc $u = v$ par strict monotonie.
(ii) On démontre d'abord que pour tout $f \in X'$

$$Au = f \Longleftrightarrow \forall v \in X : \langle Av - f, v - u\rangle \geq 0 \tag{10}$$

En fait, si $Au = f$, alors $\langle Av - f, v - u\rangle \geq 0$ par monotonie de A. Pour l'implication inverse , soit $w \in X$ et $\lambda \geq 0$,posons $v = u + \lambda w$. Alors

$$\langle A(u + \lambda w) - f, \lambda w\rangle \geq 0$$

ou

$$\langle A(u + \lambda w) - f, w\rangle \geq 0$$

Faisant tendre λ vers 0 ($\lambda \to 0$)et utilisant A hémicontinu, on obtient

$$\langle Au - f, w\rangle \geq 0.$$

En remplaçant w par $-w$, nous obtenons $\langle Au - f, w\rangle = 0$, et puisque $w \in X$ est arbitraire, $Au = f$.Nous avons donc prouvé (10).
Soit maintenant $S := \{u \in X : Au = f\}$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $Au = f$. Pour chaque $v \in X$, l'ensemble $S_v := \{u \in X : \langle Av - f, v - u\rangle \geq 0\}$ est convexe, et par (10),
$S = \bigcap\limits_{v \in X} S_v$, est donc également convexe. Par l'hypothèse, $S \subset \{\|u\| = \delta\}$ pour $\delta \geq 0$.Puisque X est strictement convexe, l'ensemble S est donc réduit à au plus un point.Par conséquent, A est injectif. ■

4 Applications

4.1 Opérateur differentiel d'ordre 1

Proposition 9 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,un ensemble ouvert borné, $p \geq 2$, q le conjugué de p et $bi \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction satisfaisant la condition de croissance*

$$\exists C > 0; \forall s \in \mathbb{R}, |b_i(s)| \leq C(1 + |s|)^{p-2} \tag{11}$$

Alors, l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} Bi & : & W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \rightsquigarrow & b_i(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \end{array}$$

est bien défini, borné et hémicontinu. Si b_i est constant, alors B_i est en plus monotone.

Preuve de la proposition.
Soit $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,alors par (**??**) et par l'inégalité de Holder, on a

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega |B_i(u)v|\,dx & = & \displaystyle\int_\Omega \left| b_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} v\right| dx \\ & \leq & C\displaystyle\int_\Omega (1+|u|)^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right| dx \\ & \leq & C\displaystyle\int_\Omega \left((1+|u|)^{\frac{p(p-2)}{p-1}}\left(|v|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right) dx.\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p} \\ & \leq & C\displaystyle\int_\Omega (1+|u|^p)^{\frac{(p-2)}{p}} dx.\|v\|_{L^p}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p} < \infty \end{array}$$

de sorte que B_i est bien défini. De cette estimation on obtient en plus pour chaque $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{array}{rcl} \|B_i(u)\|_{W^{-1,q}} & = & \displaystyle\sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}}\leq 1}\left|\int_\Omega B_i(u)v dx\right| \\ & \leq & C\displaystyle\sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}}\leq 1}\|1+|u|\|_{L^p}^{p-2}\|v\|_{L^p}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p} \\ & \leq & Cste\,(1+\|u\|_{L^p})^{p-2}\|u\|_{W_0^{1,p}} \end{array}$$

Ainsi B_i est borné.
Soit maintenant $u, v, w \in W^{1,p}(\Omega)$,par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{array}{rcl} |\langle B_i(u+tv) - B_i(u), w\rangle| & \leq & \displaystyle\int_\Omega |b_i(u+tv) - b_i(u)|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right||w|\,dx \\ & & +t\displaystyle\int_\Omega |b_i(u+tv)|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right||w|\,dx \\ & \to & 0 \text{ quand t} \to 0, \end{array}$$

Par conséquent B_i est hemi continu.
La monotonie de B_i dans le cas constant est déjà démontrée voir exemple1.
■

4.2 Opérateur differentiel d'ordre2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in]1, +\infty[$ et $X = W^{1,p}(\Omega)$. On se donne une application $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et monotone au sens où pour tout couple $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^N$

$$(F(\lambda) - F(\mu)).(\lambda - \mu) \geq 0,$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien usuel dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que F satisfait la condition de croissance

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N, |F(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|^{p-1})$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Proposition 10 *L'opérateur $A(u) = -div(F(\nabla u))$ est bien defini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p}(\Omega)$. Il est borné,hemicontinu et monotone.*
Preuve.
Soit q l'exposant conjugué de p. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et $F(\nabla u) \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$. En effet,

$$\begin{aligned} |F(\nabla u)|^q &= |F(\nabla u)|^{p(p-1)} \leq C(1 + |\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq C\prime(1 + |\nabla u|^p) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Par consequent, $-div(F(\nabla u)) \in W^{-1,q}(\Omega)$ avec la dualité

$$\langle -div(F(\nabla u)), v \rangle_{W^{-1,q}, W_0^{1,p}} = \int_\Omega F(\nabla u).\nabla v dx;\ \textit{pourtout } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

De plus, si u est dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors ∇u est dans un borné de $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et par le calcul precédent, $F(\nabla u)$ est dans un borné de $L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Par consequent, $A(u)$ reste dans un borné de $W^{-1,q}(\Omega)$. Par (résultat démontré en td) , l'application $z \to F(z)$ est continue de $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Par composition avec des applications linéaires continues, on en déduit que A est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$, donc à fortiori hemicontinu.
Enfin, par monotonie de F, on a pour tout couple $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ■

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle = \int_\Omega (F(\nabla u) - F(\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \geq 0.$$

Donc A est monotone. Un exemple d'une telle fonction F est donné par

$$F(\lambda) = |\lambda|^{p-2} \lambda.$$

Ce qui permet de definir l'opérateur p Laplacien

4.3 Un problème elliptique

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,un ensemble ouvert borné, $p \geq 2$, $b \in \mathbb{R}^N$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction appartenant à $L^2(\Omega)$. On considère le problème aux limites elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) + b.\nabla u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{12}$$

Une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible de ce problème si pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \right) dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \right) dx = \int_\Omega (f\varphi)\, dx \tag{13}$$

Theorem 11 (Théorème d'existence) *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution faible unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$du problème (12).*

Démonstration du théorème.
Puisque $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ pour $p \geq 2$ alors $\left(L^2(\Omega)\right)' = L^2(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega)$ .Donc $f \in W^{-1,p}(\Omega)$
le résultat d'existence et d'unicité découle alors de l'application des propositions(9), (10) (7) et(8) . ■

References

[1] L. C. Evans, Partial differential equations, Graduate studies in Mathematics,volume 19, Providence, R.I.: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4974-3, MR 2597943 American Mathematical Society.