Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ (Faites-vous aider par le dessin de D).

1. $f(x,y) = xy$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x+y \leq 1\right\}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^3}$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup x \geq 1\,,\, y \geq 1\,,\, x+y \leq 3\right\}$
3. $f(x,y) = \ln(1+x+y)$, D le triangle de sommets $O(0,0), A(1,0), B(0,2)$.
4. $f(x,y) = \cosh(x+y)$, D le trapèze de sommets $A(-2,0), B(2,0), E(1,1), F(-1,1)$.
5. $f(x,y) = x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup x \geq y \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq \pi\right\}$
6. $f(x,y) = x^2+y^2$ D le domaine délimité par deux cercles : celui de centre $O(0,0)$ et de rayon 3, et celui de centre $A(1,0)$ et de rayon 1.

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants, calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$.

1. $f(x,y,z) = xyz$, $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\,,\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$
2. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup\, |x|+|y|+|z| \leq 1\right\}$
3. $f(x,y,z) = |xyz|$, $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup\, 1 \geq z \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq z^2\right\}$
4. $f(x,y,z) = \sqrt{R^2-(x^2+y^2+z^2)}$, D la boule de centre $O(0,0,0)$ et de rayon R.
5. $f(x,y,z) = 1$, $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup\, \left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{2/3} \leq 1\right\}$ avec $a,b,c > 0$. On pourra, par un changement adéquat, se ramener à une boule euclidienne.

Exercice 3 : Soient C_x et C_y deux cylindres pleins de même rayon R et d'axes OX et OY respectivement. Calculer le volume du domaine $D = C_x \cap C_y$. (On commencera par écrire les inégalités définissant chacun des deux cylindres)

Exercice 4 : On se propose d'évaluer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ en utilisant une intégrale double.

1. Montrer d'abord que I est convergente.
2. On considère $J_{a,b} = \displaystyle\iint_{0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$. A l'aide du théorème de Fubini, réduire de deux façons $J_{a,b}$ à deux intégrales simples $J^1_{a,b}$ et $J^2_{a,b}$ (on ne demande pas de les calculer).
3. En justifiant le passage à la limite dans $J^1_{a,b}$ et $J^2_{a,b}$ quand $a,b \longrightarrow +\infty$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.
4. En déduire la valeur de I.

2ème année de Licence de Mathématiques - 2019/2020.

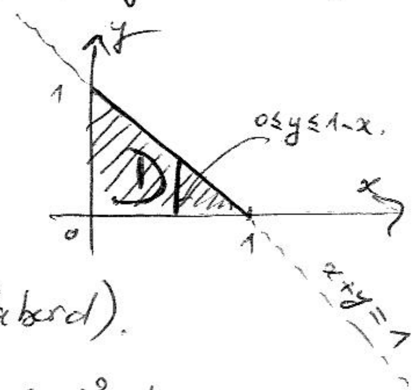
Module: « Analyse 4 » - Semestre 2 - Série de TD N°3.

Corrigé.

Exercice 1:

1/ $f(x,y) = xy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$.

On peut appliquer le théorème de Fubini. En résolvant en y on a: $0 \leq y \leq 1-x$ et $0 \leq x \leq 1$



(On peut tout aussi le faire par rapport à x d'abord).

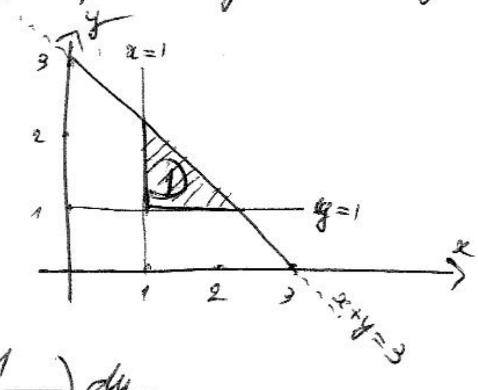
$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y\,dy\right) x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{24}}$$

2/ $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1; y \geq 1; x+y \leq 3\}$

Résolvons (par exemple) par rapport à x

$1 \leq x \leq 3-y$, $1 \leq y \leq 2$



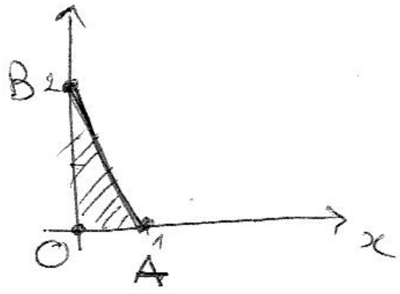
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} = \int_1^2 \left(\int_1^{3-y} \frac{dx}{(x+y)^3}\right) dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{-1}{2(x+y)^2}\right]_1^{3-y} dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{3^2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-1}{1+y}\right]_1^2 - \frac{1}{9}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{9-6-2}{36} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

3/ $f(x,y) = \ln(1+x+y)$; D : triangle de sommets $O(0,0)$; $A(1,0)$; $B(0,2)$

Il faut d'abord déterminer l'équation de la droite (AB).



$$y = \alpha x + \beta : \begin{cases} \alpha . 1 + \beta = 0 \\ \alpha . 0 + \beta = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \text{d'où } y = -2x + 2$$

Si on résoud en y on aura : $0 \leq y \leq 2(1-x)$ et $0 \leq x \leq 1$.

$$\iint_D \ln(1+x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2(1-x)} \ln(1+x+y)\,dy \right) dx.$$

$$= \int_0^1 \Big[(1+x+y)\ln(1+x+y) - y \Big]_0^{2(1-x)} dx$$

$$= \int_0^1 \Big\{ (3-x)\ln(3-x) - 2(1-x) - (1+x)\ln(1+x) \Big\} dx.$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(3-x)^2 \ln(3-x) + \frac{1}{4}(3-x)^2 + (1-x)^2 - \frac{1}{2}(1+x)^2\ln(1+x) + \frac{1}{4}(1+x)^2 \right]_0^1$$

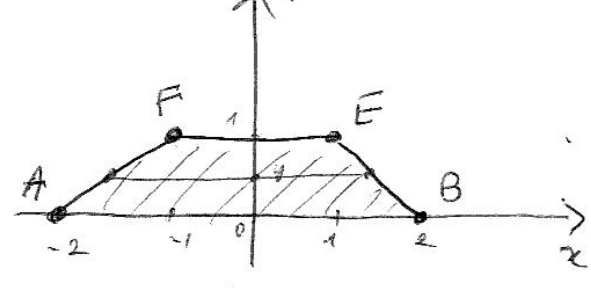
$$= \left(-2\ln 2 + 1 - 2\ln 2 + 1 \right) - \left(-\frac{9}{2}\ln 3 + \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \boxed{\frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}}$$

4/ $f(x,y) = ch(x+y)$ D : le trapèze de sommets $A(-2,0)$; $B(0,2)$ $E(1,1)$; $F(-1,1)$

On applique le théorème de Fubini en intégrant en x puis en y.

Il faut déterminer les équations de (AF) et (BE) :



(AF) : $y = x + 2$

(BE) : $y = -x + 2$.

$$\iint_D ch(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y-2}^{-y+2} ch(x+y)\,dx \right) dy$$

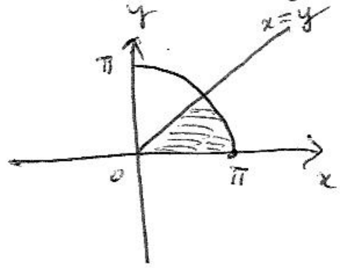
$$= \int_0^1 \Big[sh(x+y) \Big]_{x=y-2}^{x=-y+2} dy = \int_0^1 \big(sh2 - sh(2y-2) \big)\,dy$$

$$= sh2 - \frac{1}{2}\Big[ch(2y-2) \Big]_0^1 = sh2 - \frac{1}{2}\Big[1 - ch2 \Big]$$

$$= sh2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ch2 = \boxed{\frac{3e^{2} - e^{-2}}{4} - \frac{1}{2}}$$

5°/ $f(x,y) = x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y \geq 0 ;\ x^2+y^2 \leq \pi \right\}$

On applique le changement de variables polaire :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq \pi \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq \pi/4 \end{cases}$$

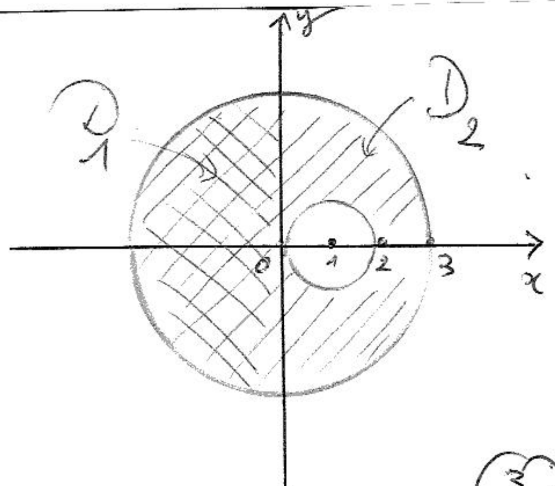
$$\iint_D x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi} r\cos\theta . \cos r .\ r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} r^2\cos r\,dr\right)$$

$$= \Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/4} . \Big[(r^2-2)\sin r + 2r\cos r\Big]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \times (-2\pi)} = \boxed{-\pi\sqrt{2}}$$

6°/ $f(x,y) = x^2 + y^2$

On décompose D en la réunion de deux domaines D_1 et D_2 avec $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$.



L'équation du grand cercle est $x^2+y^2=9$, celle du petit cercle est $(x-1)^2+y^2=1$. Donc

$$\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 9 \text{ et } (x-1)^2+y^2\geq 1\}.$$

Aussi $\mathcal{D}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 9 \text{ et } x\leq 0\}$

$\mathcal{D}_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 9 , (x-1)^2+y^2\geq 1 \text{ et } x\geq 0\}$.

En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, les domaines

deviennent : $\mathcal{D}_1=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 / 0\leq r\leq 3 ; \frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}\}$

$\mathcal{D}_2=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 / 0\leq r\leq 3 ; r\geq 2\cos\theta, \frac{-\pi}{2}\leq\theta\leq\pi/2\}$

$$\iint_{\mathcal{D}}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint_{\mathcal{D}_1}(x^2+y^2)\,dx\,dy+\iint_{\mathcal{D}_2}(x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{(Chasles)}.$$

$$=\int_0^3\int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} r^2.r\,dr\,d\theta+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{2\cos\theta}^{3} r^3\,dr\right)d\theta$$

$$=\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{2\cos\theta}^{3}d\theta=\frac{81\pi}{4}+\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi/2}\left(\frac{81}{4}-4\cos^4\theta\right)d\theta$$

On linéarise : $\cos^4\theta=\frac{1}{8}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3)$

$$\iint_{\mathcal{D}}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{81}{2}\pi-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4\theta}{4}+2\sin 2\theta+3\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{81}{2}\pi-\frac{3}{2}\pi=\boxed{39\pi}$$

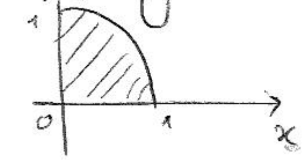
Exercice 2:

1/ $f(x,y,z) = xyz$; $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 ; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

On peut commencer par appliquer le théorème de Fubini en résolvant par rapport à z et en projetant D sur le plan XOY, le domaine obtenu est $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0$ et $x^2+y^2 \leq 1\}$ (en mettant $z=0$).

On a $x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$ et comme $z \geq 0$ donc $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$I = \iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz = \iint_U \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\right) xy\,dx\,dy$$



$$= \frac{1}{2}\iint_U xy(1-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Maintenant on peut passer en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$

D'où $I = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\pi/2} r^2(\cos\theta\sin\theta)\cdot(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3(1-r^2)\,dr\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\cdot\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{48}}$$

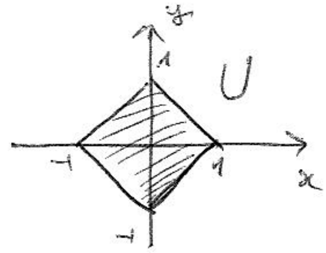
2/ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / |x|+|y|+|z| \leq 1\}$

On peut procéder comme précédemment, $|z| \leq 1-|x|-|y|$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x|+|y| \leq 1\}$

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_U \left(\int_{-(1-|x|-|y|)}^{1-|x|-|y|} (x^2+y^2+z^2)\,dz\right) dx\,dy$$

$$= \iint_U \left[(x^2+y^2)z + \frac{1}{3}z^3\right]_{-(1-|x|-|y|)}^{1-|x|-|y|} dx\,dy = \iint_U \left(2(x^2+y^2)(1-|x|-|y|) + \frac{2}{3}(1-|x|-|y|)^3\right) dx\,dy$$

A présent on peut utiliser le fait que la fonction sous l'intégrale double est paire en ~~x~~ x et en y, de plus le domaine U est symétrique par rapport à l'axe Ox et Oy. Donc



$$I = 8 \iint_{\{x,y\geq 0,\, x+y\leq 1\}} \left((x^2+y^2)(1-x-y) + \frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right) dx\,dy.$$

$$= 8 \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ (1-x)(x^2+y^2) - y(x^2+y^2) + \frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right\} dy \right] dx.$$

$$= 8 \int_0^1 \left[(1-x)\left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right) - \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{12}(1-x-y)^4 \right]_0^{1-x} dx.$$

$$= 8 \int_0^1 \left\{ (1-x)^2\left(x^2 + \frac{1}{3}(1-x)^2\right) - \frac{1}{4}\left(x^2+(1-x)^2\right)^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{12}(1-x)^4 \right\} dx$$

$$= 8 \int_0^1 \left\{ \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \right\} dx.$$

$$= 8 \left[\frac{2}{15} - \frac{5}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right] = \frac{8}{20} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

3/ $f(x,y,z) = |xyz|$; $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \geq z \geq 0 \; ; \; x^2+y^2 \leq z^2 \right\}$

On peut utiliser les coordonnées cylindriques $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} 0\leq h\leq 1 \\ 0\leq r\leq h \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{matrix}$

$$I = \iiint_D |xyz|\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\int_0^h r^2|\cos\theta\sin\theta|h \,.\, r\,dr \right) d\theta\,dh.$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} |\cos\theta\sin\theta|\,d\theta \right) \int_0^1 \frac{h^4}{4}\,dh = \frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos\theta\sin\theta|\,d\theta$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin 2\theta}{2} \right| d\theta = \frac{1}{10}\int_0^{2\pi} |\sin t|\,dt = \frac{4}{10}\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\left[-\cos t \right]_0^{\pi/2} = \boxed{2/5}$$

4/ $f(x,y,z) = \sqrt{R^2-(x^2+y^2+z^2)}$; D : boule euclidienne de centre $(0,0,0)$ et de rayon R

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$$

On utilise les coordonnés sphériques : $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & 0\leq r\leq R \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & 0\leq\theta\leq\pi \\ z = r\cos\theta & 0\leq\varphi<2\pi \end{cases}$

Le Jacobien est $J = r^2\sin\theta$.

$$I = \iiint_D \sqrt{R^2-(x^2+y^2+z^2)}\, dxdydz = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\, r\sin\theta . \, drd\theta d\varphi$$

$$= 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R = (2\pi)\times(2)\times\left(\frac{1}{3}R^3\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

5/ $f(x,y,z)=1$, $\quad D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\leq 1\}$; $a,b,c>0$.

L'intégrale triple de f est tout simplement le volume de D. La fonction réelle $t\mapsto t^{2/3}$ n'est définie que si $t>0$ donc pour $(x,y,z)\in D$, $x,y,z>0$.

On peut faire le changement $\begin{cases} x = au^3 \\ y = bv^3 \\ z = cw^3 \end{cases}$, $u,v,w>0$. Le Jacobien est $J = 27abc\, u^2v^2w^2$ et le domaine devient $B = \{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 / \ u,v,w>0, \ u^2+v^2+w^2\leq 1\}$

$\iiint_D dxdydz = Vol(D) = 27abc \iiint_B u^2v^2w^2\, dudvdw$. On introduit à présent les coordonnés sphériques : $\begin{cases} u = r\sin\theta\cos\varphi & 0\leq r\leq 1 \\ v = r\sin\theta\sin\varphi & 0\leq\theta\leq\pi/2 \\ w = r\cos\theta & 0\leq\varphi\leq\pi/2 \end{cases}$

$$Vol(D) = 27abc\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (r\sin\theta\cos\varphi)^2(r\sin\theta\sin\varphi)^2(r\cos\theta)^2\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$= 27abc\left(\int_0^1 r^8 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^5 d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^4 d\varphi\right)$$

On linéarise : $\cos^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$

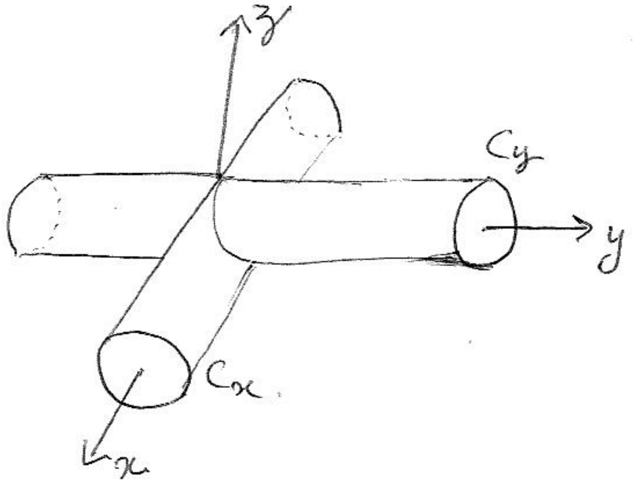
$\sin^5\theta = \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta)$

D'où $Vol(D) = 3abc . \frac{1}{8.16}\left[\frac{\sin 4\varphi}{4} + 2\sin 2\varphi + 3\varphi\right]_0^{\pi/2}\left[-\frac{\cos 5\theta}{5} + 5\frac{\cos 3\theta}{3} - 10\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$

$$\boxed{Vol(D) = \frac{3\pi}{10}abc}$$

Exercice 3 :

Les cylindres C_x et C_y sont définis par :



$$C_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y^2+z^2 \leq R^2\}$$

$$C_y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+z^2 \leq R^2\}$$

Le domaine en question est $C_x \cap C_y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y^2+z^2 \leq R^2 \text{ et } x^2+z^2 \leq R^2\}$

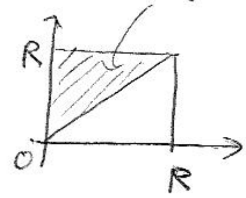
On utilise le théorème de Fubini, en intégrant d'abord en z :

$$|z| \leq \sqrt{R^2-x^2} \text{ et } |z| \leq \sqrt{R^2-y^2} \Rightarrow |z| \leq \min\left(\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-y^2}\right).$$

La projection sur XOY de $C_x \cap C_y$ est $[-R,R]^2$. ($|y| \leq R$ et $|x| \leq R$).

Donc $\mathrm{Vol}(C_x \cap C_y) = 2 \iint_{[-R,R]^2} \min\left(\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-y^2}\right) dx\,dy$

$$= 8 \iint_{[0,R]^2} \min\left(\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-y^2}\right) dx\,dy$$



$$= 16 \iint_{0 \leq x \leq y \leq R} \sqrt{R^2-y^2}\, dx\,dy$$

$$= 16 \int_0^R \left(\int_0^y \sqrt{R^2-y^2}\, dx \right) dy$$

$$= 16 \int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\, dy = 8 \left[-\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{3/2} \right]_0^R$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}(C_x \cap C_y) = \frac{16}{3} R^3}$$

Exercice 4 : Calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$; en utilisant des intégrales doubles.

1°/ I est convergente ; En effet : $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x - \ln 1}{x-1}\right)\cdot\frac{1}{x+1} = 1/2$.

càd la fonction $\frac{\ln x}{x^2-1}$ est prolongeable par continuité au point 1.

* Comme $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$ alors il existe $M>0$ tq $\left|\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2-1}\right| \leq M$

au voisinage de 0. et donc $\left|\frac{\ln x}{x^2-1}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$. Sachant que $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge

alors I converge absolument au voisinage de 0.

2°/ Posons $Q_{a,b} = \underset{x}{[0,a]} \times \underset{y}{[0,b]}$ et $J_{a,b} = \iint_{Q_{a,b}} \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)}$

* Intégrons d'abord en y : $\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y}\right)\frac{1}{1-x^2}$

$$\int_0^b \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{1-x^2}\left[\ln\left(\frac{1+y}{1+x^2y}\right)\right]_0^b = \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+b}{1+bx^2}\right)$$

$$\text{d'où } J_{a,b} = \boxed{\int_0^a \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+b}{1+bx^2}\right)dx = J^1_{a,b}}.$$

* Intégrons maintenant en x d'abord : $\int_0^a \frac{dx}{1+x^2y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{y})\Big]_0^a = \frac{\operatorname{arctg}(a\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$

$$\text{d'où } J_{a,b} = \boxed{\int_0^b \frac{\operatorname{arctg}(a\sqrt{y})}{(1+y)\sqrt{y}}\,dy = J^2_{a,b}}$$

3°/ On laisse la justification des passages à la limite ($a\to+\infty$, $b\to+\infty$) au lecteur.

$$\lim_{a,b\to+\infty} J^1_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x^2}{x^2-1}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx.$$

$$\lim_{a,b\to+\infty} J^2_{a,b} = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \pi\int_0^{+\infty}\frac{d(\sqrt{y})}{1+(\sqrt{y})^2} = \pi\left[\operatorname{arctg}\sqrt{y}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$\text{d'où } \boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \pi^2/4}$$

4°/ $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx}_{x=1/t} = 2I \Longrightarrow \boxed{I = \pi^2/8}$