Notes de Cours - Analyse 4

Hacen DIB

24 Mars 2020

Chapitre 1

Rappels de Topologie de $\mathbb{R}^n$

Le présent chapitre contient les principales notions, déjà traitées en module de Topologie, qui nous seront utiles en Analyse 4.

1.1 Normes

Définition 1.1.1 *On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application*

$$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que

(i) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (*inégalité triangulaire*)

On note parfois (et même souvent) une norme par $\|.\|$. La distance associée à une norme est définie par : $d(x,y) = N(x-y)$.

Exemple 1.1.2 *En voici quelques exemples :*

1. $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2. $\|x\|_\infty = \displaystyle\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

3. $\|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (*norme euclidienne*)

Essayons pour $n = 2$ de déterminer la distance entre les points $(1,0)$ et $(0,1)$ en utilisant les trois normes données précédemment. On aura :

- ☐ $d_1\left((1,0),(0,1)\right) = \|(1,-1)\|_1 = 2$
- ☐ $d_2\left((1,0),(0,1)\right) = \|(1,-1)\|_2 = \sqrt{2}$
- ☐ $d_\infty\left((1,0),(0,1)\right) = \|(1,-1)\|_\infty = 1$

On remarque que seule d_2 exprime la distance intuitive, c'est la distance euclidienne.

Proposition 1.1.3 *Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \tag{1.1}$$

Démonstration : Il suffit d'écrire

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

d'où

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Puis échanger le rôle de x et y. Se souvenir que si $a \leq b$ et $-a \leq b$ alors $|a| \leq b$. ■

Définition 1.1.4 *(boule ouverte, boule fermée, ouvert, fermé)*

(a) L'ensemble $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup \|x - a\| < r\}$ s'appelle boule ouverte de centre a et de rayon r.

(b) L'ensemble $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup \|x - a\| \leq r\}$ s'appelle boule fermée de centre a et de rayon r.

(c) Un sous-ensemble $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$ est dit ouvert si $\forall a \in \mathscr{O}$ $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathscr{O}$.

(d) $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash \mathscr{F}$ est ouvert.

Exemple 1.1.5 *1. Boules dans $\mathbb{R}^2$*

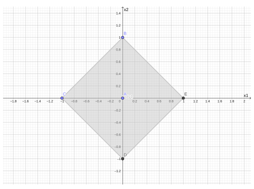

FIGURE 1.1 – $B_1((0,0),1)$

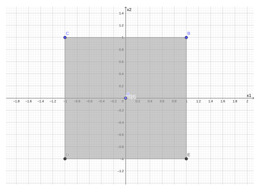

FIGURE 1.2 – $B_\infty((0,0),1)$

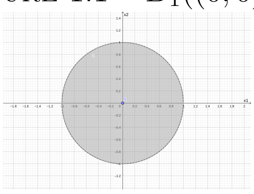

FIGURE 1.3 – $B_2((0,0),1)$

2. $\mathscr{P} = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \diagup x_2 > 0\right\}$ est un ouvert. (Avec n'importe quelle norme)

3. $A =]0,+\infty[\times \{0\}$ n'est ni ouvert ni fermé.

1.1.6 Normes équivalentes

Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes si et seulement si $\exists \alpha, \beta\ > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x) \tag{1.2}$$

Exemple 1.1.7 *On peut aisément établir les inégalités suivantes*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Il est facile de remarquer que l'équivalence se traduit par des inclusions de boules de même centre (avec différents rayons) et ce pour les deux normes en question. Par exemple, dans un carré on peut toujours inscrire un disque et vice-versa. Nous montrerons plus loin que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Ceci permettra, en particulier, de ne pas faire grand cas de la norme quand on parlera de convergence de suites, de continuité, etc...

1.2 Notion de compacité

Nous adopterons la définition suivante de la compacité, appelée propriété de Bolzano-Weirestraß.

Définition 1.2.1 *Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ (muni d'une norme donnée) est dit compact si et seulement si "de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente".*

Exemple 1.2.2 $K = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^n$ *est compact.*

En effet, fixons la norme $\|.\|_\infty$. Après on pourra se passer de cette "restriction". Si $(x_k)_{k\geq 0}$ est une suite dans K, alors pour chaque indice $i = 1, 2, \cdots, n$ la suite $(x_{i,k})_k$ est dans $[-1, 1]$. La compacité (propriété de Bolzano-Weirestraß) de $[-1, 1]$ (se reporter au cours d'Analyse 1) nous permet d'extraire de $(x_{1,k})_k$ une sous-suite convergente dans $[-1, 1]$, appelons-la $(x_{1,\phi_1(k)})_k$. On considère alors la suite $(x_{2,\phi_1(k)})_k$. On procède de la même façon. La deuxième extraction permet de dire que les deux premières composantes $(x_{1,\phi_1(\phi_2(k))})_k$ et $(x_{2,\phi_1(\phi_2(k))})_k$ sont convergentes. On réitère ce procédé jusqu'à la dernière composante. Il faut opérer n extractions successives et "emboîtées".

Nous terminons cette section par un théorème de caractérisation des compacts dans $\mathbb{R}^n$, discuté en détail dans le cours de Topologie.

Théorème 1 *K est compact dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si K est fermé et borné.*

1.3 Notion de continuité

Définition 1.3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Alors $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue au point a si et seulement si :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ \forall x \in U \quad \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{1.3}$$

La convergence de f sur U signifie qu'elle est convergente en tout point de U.

Proposition 1.3.2 *Les propriétés suivantes sont identiques au cas d'une variable en énoncé et démonstration.*

A- *f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_m) convergente vers a, la suite $(f(x_m))$ converge vers $f(a)$.*

B- *Si f et g sont continues, alors $f \pm g$, $f.g$ et $f \circ g$ le sont aussi. De plus f/g est continue (en a) si $g(a) \neq 0$.*

C- *Si f est continue sur un compact, alors elle est bornée et elle atteint son maximum et son minimum.*

Démonstration : Nous donnerons la démonstration de la propriété **C** seulement car les deux premières sont faciles à établir. La bornitude de f s'écrit comme suit

$$\exists M > 0 \quad \text{telle que} \quad \forall x \in K \qquad |f(x)| \leq M$$

Faisons un raisonnement par l'absurde, et supposons que pour tout $M > 0$ il existe $x_M \in K$ tel que $|f(x_M)| > M$. Prenons pour M un entier naturel j. Ainsi on dispose maintenant d'une suite (x_j) dans K qui vérifie que $|f(x_j)| > j$, en particulier $\lim\limits_{j \to +\infty} |f(x_j)| = +\infty$. La compacité de K nous donne la possibilité d'extraire une sous-suite, qu'on appellera aussi (x_j), qui converge vers une limite a appartenant à K car c'est un fermé. Mais la continuité de f, par la propriété **A**, permet de dire que $\lim\limits_{j \to +\infty} |f(x_j)| = |f(a)|$, d'où la contradiction. Montrons à présent que f atteint son maximum, pour le minimum c'est pareil. Rappelons la ε-caractérisation de la borne supérieure. Posons $M_f = \sup\limits_{x \in K} f(x)$. Alors on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in K \qquad \text{tel que} \qquad M_f - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq M_f$$

Prenons pour ε une suite tendant vers 0, par exemple $\varepsilon = 1/2^k$. Cela nous donnera une suite (x_k) dans K telle que

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = M_f$$

La compacité de K nous permet d'extraire une sous-suite, notée aussi (x_k), convergente dans K vers une limite a. Par la continuité de f on a $M_f = f(a)$. ■

Remarque 1.3.3 *Dans beaucoup de situations la propriété* ***A*** *est utilisée dans le sens négatif, c'est-à-dire pour montrer qu'une fonction n'est pas continue. Par exemple pour la fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

on peut considérer la suite $(1/k, 1/k)$*, manifestement convergente vers* $(0,0)$*, qui donne* $f(1/k,1/k) = 1/2 \nrightarrow 1$*, c'est-à-dire que cette fonction n'est pas continue en* $(0,0)$*.*

Nous allons terminer ce chapitre par une application de ce qui précède.

Proposition 1.3.4 *Toutes les normes sur* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes.*

Démonstration : Il suffit de montrer qu'une norme quelconque N est équivalente à la norme $\|.\|_\infty$ (par exemple). Soit $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors on a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n N(e_i)$$

Autrement dit $N(x) \leq b\|x\|_\infty$ avec $b = \sum_{i=1}^n N(e_i)$. Remarquons que $b > 0$ car sinon on aurait $\forall i = 1,2,\cdots,n \ \ N(e_i) = 0$ ce qui est absurde. L'utilisation de (1.1) donne

$$|N(x) - N(x')| \leq N(x - x') \leq b\|x - x'\|_\infty$$

Cette dernière inégalité montre bien que N en tant qu'application est continue de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ car lipschitzienne. Considérons la "sphère" unité

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup \|x\|_\infty = 1\} = [-1,1]^n.$$

Nous avons déjà montré que c'est un compact. Donc $\exists a \in K$ tel que $N(a) = \min_{x\in K} N(x)$. Il est clair que $N(a) \neq 0$ car a est dans K. Soit maintenant $x \neq 0$. Alors $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in K$ et donc $N\left(\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq N(a)$, ce qui donne par l'homogénéité de la norme $N(x) \geq N(a)\|x\|_\infty$. cette inégalité reste vraie pour $x = 0$ et c'est l'inégalité qui nous manquait pour l'équivalence. ■