Corrigé de l'exercice 2 du fichier Problèmes MR II

Exercice 2 Etudier l'applicabilité du théorème de convergence de Thieme au système suivant, où les variables x, y et z sont positives et $d < 3/4$, $d \neq 1/2$.

$$(M) \quad \begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - \dfrac{x}{30} - \dfrac{y}{x+10} - 2z\right), \\ \dot{y} = y\left(\dfrac{x}{x+10} - d - z\right) \\ \dot{z} = -2z. \end{cases}$$

Que pourrait représenter un tel modèle ?

Rép. (Compléter avec le cours pour plus de détails)

En gros, la troisième équation ayant pour solution $z(t) = z(0)e^{-2t}$, le système (M) où l'on remplace z par $z(0)e^{-2t}$ est un système asymptotiquement autonome, de problème limite

$$(M_0) \quad \begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - \dfrac{x}{30} - \dfrac{y}{x+10}\right), \\ \dot{y} = y\left(\dfrac{x}{x+10} - d\right). \end{cases}$$

Ce problème est simplement un modèle proie-prédateur classique admettant trois équilibres $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (30,0)$ et un équilibre intérieur $E_* = (x_*, y_*)$. Nous utilisons les propriétés connues de ces modèles sans redonner toutes les preuves.

1er cas : $0 < d < 1/2$, $E_* = (x_*, y_*)$ est instable, entouré par un cycle limite stable, tandis que $E_0 = (0,0)$et $E_1 = (30,0)$ sont des points-selles.

2ième cas : $1/2 < d < 3/4$, $E_* = (x_*, y_*)$ est asymptotiquement stable, globalement pour toute condition initiale strictement positive, tandis que $E_0 = (0,0)$et $E_1 = (30,0)$ sont des points-selles.

Le théorème de Thieme n'est pas applicable dans le premier cas car certains points de $\Omega = \mathrm{R}_+^2$ ne sont pas sur la variété stable d'un des équilibres (ici tous hyperboliques) mais plutôt sur celle du cycle limite.

Le théorème est applicable au second cas (voir hypothèses une à une, celle de la dissipativité découlant du fait que $z(t) \to 0$ indépendamment de x e y et que (M_0) est un modèle de prédation dissipatif.

La propriété la plus importante, pour ne citer que celle là, est l'acyclicité : Nous sommes en présence que de trajectoires hétéroclines, ne formant pas de chaîne fermée, à savoir $E_0 \to E_1$, $E_1 \to E_*$.

Le modèle (M) peut être vu comme un modèle de chasse où x est la densité de la proie, y celle du prédateur et z l'effort de chasse, suivant lui même une dynamique 'décroissante' indépendante de la densité des espèces.