Voici une traduction [éviter si possible le mot à mot] de la page 267 du livre de HIRSCH et SMALE. Cette partie avait été expliquée en cours (présentiel).

Je rappelle que nous avions donné (Voir p. 266) les conditions sur les fonctions $M(x,y)$ et $N(x,y)$ pour que le système planaire

$$(1)\begin{cases}\dot{x} = xM(x,y)\\ \dot{y} = yN(x,y)\end{cases}$$

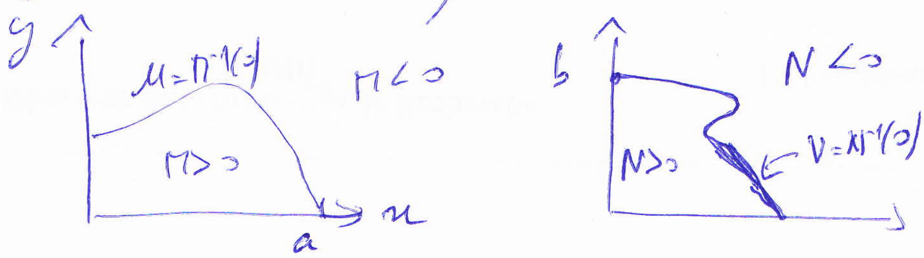
soit un système de Kolmogorov de compétition. [Voir les conditions (a), (b) et (c)].

Je rappelle que de ces conditions nous avons déduit l'existence de deux fonctions

$f : [0,a] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}_+$ avec $f^{-1}(0) = a$

et $g : [0,b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}_+$ avec $g^{-1}(0) = b$

dont les ensembles $\mu = M^{-1}(0)$ et $\nu = N^{-1}(0)$ sont des graphes



→ Supposons que μ et ν ne se coupent pas et que μ est au dessous de ν. Les équilibres sont $(0,0)$, $(a,0)$ et $(0,b)$. Toutes les orbites tendent vers un des trois équilibres mais la plupart vers l'équilibre asymptotiquement stable $(0,b)$. (Voir figure B).

Supposons maintenant que μ et ν se coupent. Nous faisons l'hypothèse que $\mu \cap \nu$ est un ensemble fini (c'est-à-dire formé d'un nombre fini de points, qui seront tous des équilibres) et, en chaque point d'intersection, μ et ν se coupent transversalement (...). C'est une propriété générique.

Les courbes μ et ν et les axes de coordonnées délimitent un nombre fini d'ouverts connexes dans le quadrant positif : ce sont des ensembles où $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$. On les appellera des régions basiques (voir fig c). Il y en a quatre types

I, $x' > 0$, $y' > 0$, II : $x' < 0$, $y' > 0$

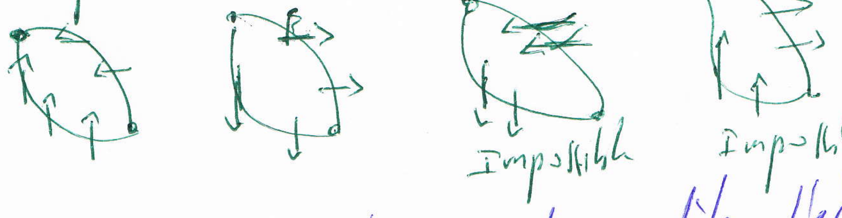
III $x' < 0$, $y' < 0$, IV : $x' > 0$, $y' < 0$

p. 268. Le bord ∂B d'une région basique B est formé de points de types suivants : des points de $\mu \cap \nu$, appelés sommets ; des points sur μ ou ν mais pas sur les deux ni sur les axes de coordonnées, appelés points ordinaires du bord ; et des points sur les axes.

Un sommet est un point d'équilibre. Les autres équilibres sont $(0,0)$, $(a,0)$ et $(0,b)$. En un point ordinaire $w \in \partial B$, le vecteur $(\dot{x}, \dot{y})$ est soit vertical (si $w \in \mu$) soit horizontal (si $w \in \nu$). Le vecteur pointe (est dirigé vers) soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur de B (...)

Lemme (technique et utile pour comprendre l'analyse du modèle)

Soit B une région basique. Alors les points ordinaires de B sont soit tous "entrants" soit tous "sortants" (c.à.d que le champ de vecteurs $(\dot{x}, \dot{y})$ est soit entrant soit sortant



[Je vous conseille pour votre apprentissage des modèles d'écologie de regarder ces preuves].

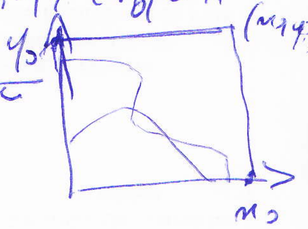
(...)

~~Une~~ Comme conséquence du lemme, toute région basique et sa fermeture est soit positivement invariante soit négativement invariante.

Quels sont des points ω-limites possibles du flot (1) ?

Il n'y a pas d'orbites fermées [C'est une conséquence primordiale pour les modèles de compétition de type Kolmogorov]. En effet, une orbite fermée (périodique) doit être contenue dans une région basique, mais ceci est impossible ~~puisque~~ $x(t)$ et $y(t)$ sont strictement monotones le long de n'importe quelle courbe solution (orbite) dans une région basique.
(Autrement : c'est impossible car une orbite fermée doit entourer au moins un point d'équilibre, et il n'y en a pas dans B !)

Nous notons aussi que toute trajectoire est définie pour tout $t \geq 0$ (les solutions sont globales) car tout point se situe dans un grand rectangle Γ engendré par $(0,0)$, $(x_0,0)$, $(0,y_0)$ et (x_0,y_0) avec $x_0 > a$, $y_0 > b$; ~~tel que~~



un tel rectangle est compact et positivement invariant. Ainsi, nous avons montré :

Théorème : Le flot ϕ_t de (1) a les propriétés suivantes : pour tout $p=(x,y)$, $x\geq 0$, $y \geq 0$, la limite $\lim_{t\to+\infty} \phi_t(p)$ existe et est l'un des équilibres en nombre fini.

Conclusion : les populations de deux espèces en compétition tendent toujours vers un des nombres finis de populations limitantes.

[TRADUIRE les pages 271, 272 et 273 avant les problèmes]

3