Université Abou-Bakr Belkaïd - Tlemcen mai 2020
Faculté de Technologie, Département d'Hydraulique

Solution Devoir n°1

Analyse Numérique

Exercice1

On considère la fonction f(x) définie sur R par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$

1- Monter que l'équation f(x)=0 admet une racine unique dans [-1, 0]

2- Calculer cette racine avec la méthode de Newton, Justifier le choix de x_0. (une condition suffisante que doit vérifier x_0 est $f(x_0)f"(x_0) \geq 0$

3- Calculer cette racine avec méthode du point fixe en choisissant une fonction $g(x)$ vérifiant le critère de convergence

Solution

1- $f(x)$ est une fonction continue sur [a, b] admet une racine unique dans [-1, 0] si :

- $f(x)$ est continue [-1, 0]. Cette condition est bien vérifiée car $f(x)$ est un polynôme et tout polynôme est continue dans $\mathbb{R}$.
- $f(-1)f(0) < 0$. En effet $f(-1) = 4$ et $f(0) = -1$, d'où $f(-1)f(0) = -4 < 0$
- f est strictement monotone sur $[-1,0]$. En effet :

$$f^{'}(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \leq 0 \;\; \forall x \in [-1, 0]$$

2- Calcul de la racine par la méthode de Newton :

Une condition suffisante que doit vérifier x_0 est $f(x_0)f"(x_0) \geq 0$

$f^{'}{'}(x) = 12x^2 - 24x$. La $x_0 = -1$ vérifie cette condition :

Algorithme de la méthode de Newton :

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} = x_n - \dfrac{{x_n}^4 - 4{x_n}^3 - 1}{4{x_n}^3 - 12{x_n}^2} \\ \text{Critère d}^{'}\text{arret: 4 Chiffres aprs la vrigule} \end{cases}$$

$$x_1 = -0.7500$$

$$x_2 = -0.6310$$

$$x_3 = -0.6012$$

$$x_4 = -0.6012$$

La racine de l’équation est $r = -0.6012$

3- La méthode du point fixe consiste à remplacer l’équation $f(x) = 0$ par une équation de la forme $x = g(x)$, pour assurer la convergence on doit avoir $|g^{'}(x)| \leq 0 \;\; \forall x \in [-1, 0]$

Il existe une infinité de fonctions $g(x)$, par exemple :

$$x_{n+1} = x_n^4 - 4x_n^3 + x_n - 1$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{(x_n - 4)^{1/3}}$$

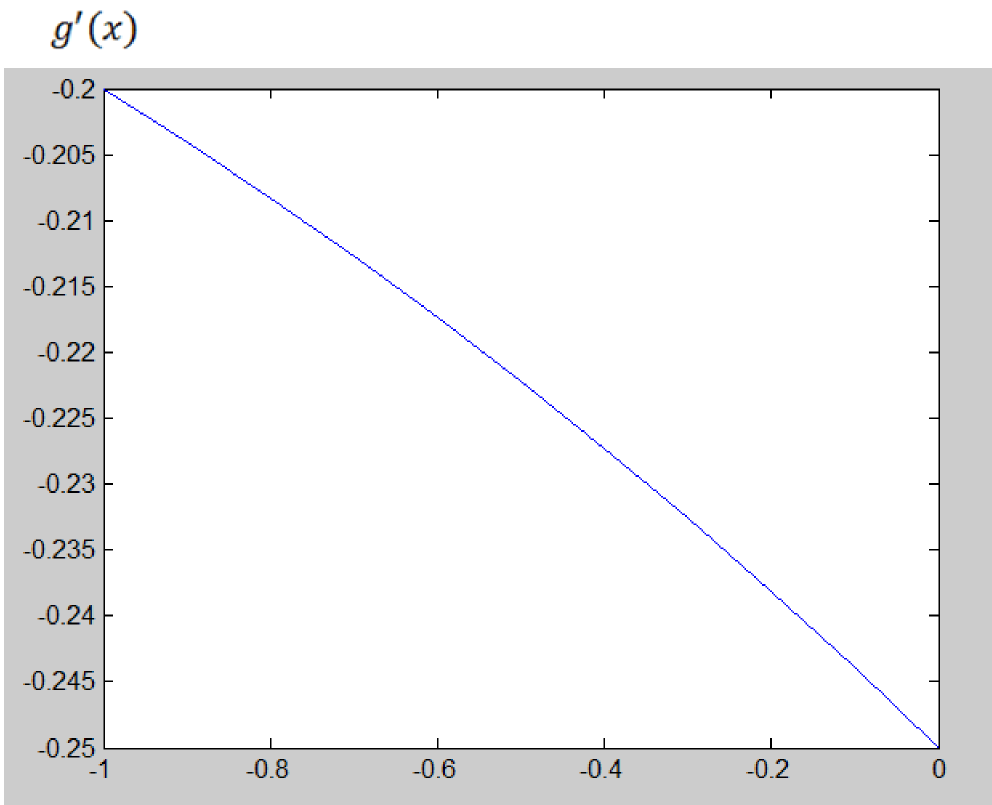
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3} + 4$$

La 2ème fonction vérifie la condition de convergence :

En effet :

$$g(x) = \frac{1}{(x_n - 4)^{\frac{1}{3}}}, \qquad g^{'}(x) = \frac{-1}{3(x-4)^{4/3}}$$

La fonction $g^{'}(x)$ est décroissante dans l’intervalle [-1,0] et sa valeur est comprise entre -0.2 et -0.25 (voir graphe) donc $|g^{'}(x)| < 1$



Calcul de la racine :

Pour la méthode du point fixe, la convergence est assurée $\forall x_0 \in [-1,0]$, on choisit $x_0 = -1$

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{(x_n - 4)^{1/3}} \\ \text{Critère d'arret: 4 Chiffres aprs la vrigule} \end{cases}$$

$$x_1 = -0.5848$$

$$x_2 = -0.6019$$

$$x_3 = -0.6012$$

$$x_4 = -0.6012$$

La racine de l'équation est $r = -0.6012$

Exercice2

Soient les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = x \text{ et } g(x) = ln(1 + 2x)$$

On note $h(x) = f(x) - g(x)$.

1- Etudier la fonction $h(x)$. Montrer qu'il existe deux valeurs pour lesquelles h s'annule : une valeur évidente (laquelle ?) et une valeur que l'note α. Localiser α dans un intervalle $I = [i, i + 1]$où i est un entier naturel.

2- Pour approcher α on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

Montrer que cette suite converge bien vers α. Calculer α à partir de $x_0 = 1$.

3- Calculer α par la méthode de Newton. Prendre $x_0 = 1$

Solution Exercice 2

1- $h(x) = f(x) - g(x) = x - ln(1 + 2x)$; $h'(x) = 1 - 2/(1 + 2x) = (2x - 1)/(2x + 1)$

x	-1/2	1/2	+∞
$h'(x)$	−		+
$h(x)$	+∞ ↘	-0.19	↗ +∞

D'après le tableau de variation, la fonction $h(x)$ s'annule en deux valeurs, une comprise dans l'intervalle $[-\infty, 1/2]$ qui est 0 (valeur évidente), l'autre racine α est comprise dans l'intervalle $[1/2, +\infty]$. On a $\alpha \in [1, 2]$ car on a $h(1)\ h(2) < 0$.

2- Pour approcher la racine α, on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

$$g'(x) = 2/(2x+1) \ \Rightarrow\ |g'(x)| < 1\ \forall\, x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

Et par conséquent cette suite converge vers la racine α.

$$x_1 = ln(3) = 1.0986;\ x_2 = 1.1623$$

3- Algorithme de Newton pour le calcul de α.

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} \\ C.A: 4\ chiffres\ après\ la\ virgule \end{cases}$$

$x_1 = 1.2958;\ x_2 = 1.2570;\ \ x_3 = 1.2564;\ x_4 = 1.2564$

$$\alpha = 1.2564$$

Exercice 3

Résoudre par les deux méthodes (Gauss et LU) le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solution

Méthode de Gauss

<u>*1ère étape : k = 1*</u>

a- on ne touche pas à la ligne L_1

b- pour les autres, on remplace chaque ligne L_i par $L_i - \frac{a_{i1}^1}{a_{11}^1} L_1\ \ (i = 2,3,4)$

- Pour $i = 2$ on remplace L_2 par $L_2 - \frac{a_{21}^1}{a_{11}^1} L_1 = L_2 - \frac{0}{10} L_1 = L_2$
- Pour $i = 3$ on remplace L_3 par $L_3 - \frac{a_{31}^1}{a_{11}^1} L_1 = L_3 - \frac{0}{10} L_1 = L_3$

- Pour $i = 4$ on remplace L_4 par $L_4 - \frac{a_{41}^1}{a_{11}^1} L_1 = L_4 - \frac{0}{10} L_1 = L_4$

On écrit la nouvelle matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad b^2 = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Pour k=1, rien ne change :

2ème étape : $k = 2$

a- on ne touche pas aux lignes L_1 et L_2

b- pour les autres, on remplace chaque ligne L_i par $L_i - \frac{a_{i2}^2}{a_{22}^2} L_2$ $(i = 3,4)$

- Pour $i = 3$ on remplace L_3 par $L_3 - \frac{a_{32}^2}{a_{22}^2} L_2 = L_3 - \frac{2}{4} L_2 = L_3 - 0.5\, L_2$
- Pour $i = 4$ on remplace L_4 par $L_4 - \frac{a_{42}^2}{a_{22}^2} L_2 = L_4 - \frac{-1}{4} L_1 = L_4 + 0.25\, L_2$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3.5 & -2 \end{pmatrix} \quad b^3 = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3ème étape : $k = 3$

a- on ne touche pas aux lignes L_1 , L_2 et L_3.

b- on remplace ligne L_4 par $L_4 - \frac{a_{43}^3}{a_{33}^3} L_3 = L_4 - \frac{3.5}{-4} L_3 = L_4 + 0.875\, L_3$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 \end{pmatrix} \quad b^4 = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 4 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

La triangularisation est achevée car le système (S') est triangulaire. Pour la résolution, on commence par le bas :

$$x_4 = \frac{-2.5}{-0.25} = 10$$

$$x_3 = \frac{4 - 2x_4}{-4} = 4$$

$$x_2 = \frac{-4 - (6x_3 + 4x_4)}{4} = -17$$

$$x_1 = \frac{25 - (5x_2 + 5x_3)}{10} = 9$$

Méthode LU

$$U = A' = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & 0.875 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & 0.875 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 4 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -17 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$