Correction de l'exemple 1.

On fait le changement de variables

$$u = x \quad , \quad v = y+1$$

le système devient $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + g(u,v)$

avec $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$, $g(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$

il faut remarquer que : $\| g(u,v) \|^2 = |(u^2-v^2)|^2$

$$= |(u-v)|^2 |(u+v)|^2 \leq 16 \|(u,v)\|^4$$

Ainsi $\dfrac{\| g(u,v) \|^2}{\|(u,v)\|^2} \leq 16 \|(u,v)\|^2 \longrightarrow 0$ qd $u,v \to 0$

Notons que $\|(u,v)\|^2 = |u|^2 + |v|^2$.

Par conséquent, le th 1. montre l'existence d'une variété stable W^s et d'une variété instable W^u, car les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1 < 0$ et $\lambda_2 = 2 > 0$.

Exercice 1. Soit le système $(1) \begin{cases} \dot{x} = Ax & x \in \mathbb{R}^n \\ \dot{y} = By & y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$

avec $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que "$x = 0$" est une variété invariante de (1).

b) Montrer que "$y = 0$" est une variété invariante de (1).